Continuité

Densité de probabilités

Espérance

Variance

Lois usuelles

Variables aléatoires réelles Rappels

- Variable aléatoire réelle = fonction d'un ensemble Ω dans R où Ω est muni d'une loi de probabilité p
- Ces variables aléatoires sont souvent notées X, Y ou Z.
- On cherche à déterminer quelles sont les chances de tomber sur telle ou telle partie de R
- Autrement dit, on cherche les probabilités pour que la valeur de X soit plus petite que 3 ou plus grande que 7.5 ou comprise entre -4 et 2.3

Variables aléatoires réelles Rappels

- On a vu (ou on admet) que la fonction qui a tout intervalle de R, [min,max] associe $p(min<X<max)$ et définie par $p(min<X<max) = p(\{\omega : min<X(\omega) <max\})$ est bien une probabilité

Variables aléatoires réelles

- Dans le cadre de ce cours on ne va considérer que des variables X de Ω dans R, telles que X(Ω) est un intervalle de R.

Pourquoi distinguer des variables discrètes ?

- Soit X une v.a. réelle, alors P(X=a)=0 pour *presque* tous les a de R.
- Donc contrairement au cas discret :
  la valeur de P en tous les points de R, ne permet pas de connaître la probabilité d'un événement quelconque.
- Dans le cadre de ce cours, on se limite aux variables aléatoires telles que P(X=a)=0 pour tout a de R.

Exercice 4.1

Soit X une v.a. réelle.

Montrez que $P(X=a)=0$ pour presque tous les a de R.

On pourra considérer $\bigcup_{n>0} \{a : P(X=a) > 1/n\}$

Exercice 4.2

Donner un ensemble infini non dénombrable d'événements E_a, $0<a<1$, ayant la propriété que $P(E_a)=1$ pour tout a , mais que $P(\cap E_a)=0$

Fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle

(Rappel) la fonction de répartition F d'une variable aléatoire réelle X sur Ω est définie pour tout réel b, par

$$F(b) = P(X \leq b)$$

F détermine la loi de probabilité de X.

C'est-à-dire que connaissant F pour tout réel b, on peut calculer la probabilité pour que X soit plus grand que min et plus petit que max pour tout min et max réels ou infinis.

Densité de probabilité

- Soit X une variable aléatoire réelle, telle que pour tout a de R, P(X=a)=0.

  Une fonction f de R dans R est une densité de probabilité pour X si,

$$f(x) \geq 0, \forall x \in \mathrm{R}$$

$$\int_{-\infty}^{x} f(t)dt = F_X(x)$$

Attention !!!

- Toutes les variables aléatoires continues n’admettent pas de densité de probabilités, mais dans la suite de ce chapitre, on ne considérera que des variables continues admettant une densité de probabilité.

Densité de probabilité

- Soit X une variable aléatoire réelle, de densité de probabilité f.

  Pour tout intervalle]a,b[, on a :

$$\int_a^b f(t)dt = P(a < X < b)$$

Exercice 4.3

- X est une variable aléatoire continue dont la densité est

$$f(x) = \begin{cases} C(4x - 2x^2) & O < x < 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- Déterminez C

Densité de probabilité

- Remarque : une variable aléatoire à valeur dans R n'a pas forcément de densité de probabilité.

- Vocabulaire : si elle admet une densité de probabilité, on dira qu'il s'agit d'une variable aléatoire (absolument) continue.

Exercice 4.4

La durée de vie d'une ampoule électrique exprimée en Kilo heure est une variable aléatoire dont la densité de probabilité est une fonction $f(t)=e^{-t}$ pour tout t>=0 et f(t)=0 pour tout t négatif

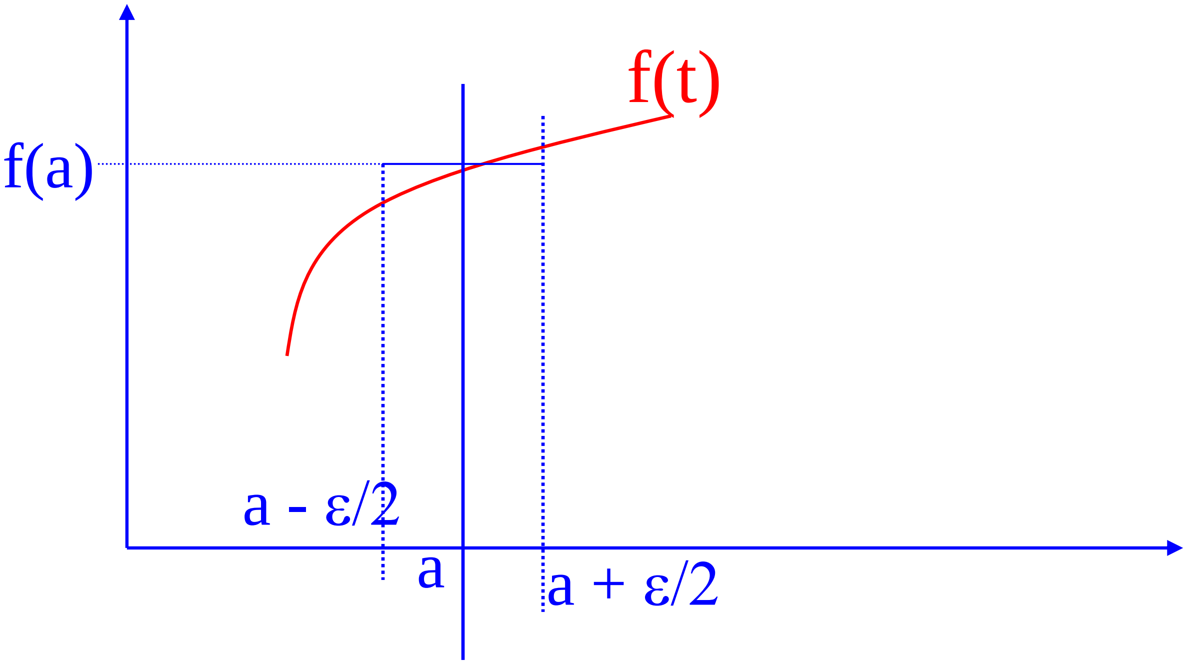
- *Quelle est la probabilité pour que l'ampoule soit encore en vie après 2000 heures ?*
- *Si l'on a deux ampoules de ce type, quelle est la probabilité pour qu'au bout de 2000 heures l'une exactement soit encore en vie ?*

Interprétation intuitive de la densité

Soit a dans R,

P(X=a)=0, cependant

$$\int_{a-\varepsilon/2}^{a+\varepsilon/2} f(t)dt = P(a-\varepsilon/2 < X < a+\varepsilon/2)$$



Interprétation intuitive de la densité

$$\int_{a-\varepsilon/2}^{a+\varepsilon/2} f(t)dt = P(a-\varepsilon/2 < X < a+\varepsilon/2)$$

Et pour ε *petit* et f continue :

$P(a\text{-}\varepsilon/2<X<a+\varepsilon/2) = \varepsilon f(a) + O(\varepsilon) \cong \varepsilon f(a)$.

En ce sens f(a) mesure la probabilité pour que X soit proche de a :

Si f(a) = 2f(b) :

Proba d'être ε-prêt de a = 2 Proba d'être ε-prêt de b.

Caractérisation des densités de probabilité

Une fonction f de R dans R est une densité de probabilité si et seulement si elle est intégrable et vérifie :

$$\forall x \in R,\ f(x) \geq 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

Idée de la preuve

Soit P dans [0,1] telle que pour tout intervalle]a,b[:

$$P(]a,b[) = \int_a^b f(x)dx$$

On vérifie que P est bien une probabilité.

Exercice 4.5

Vérifier que les fonctions des exercices 4.3 et 4.4 sont bien des densités de probabilité

Relations entre densité de probabilité et fonction de répartition

$$F(b)=P(X<b)=\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$$

Donc (si f est continue) la densité de probabilité est la dérivée de la fonction de répartition $F'(b) = f(b)$.

Exercice 4.6
(exemple de distribution bêta)

Soit g définie par :

- $g(x) = x^2(1 - x)$ pour $0 < x < 1$
- $g(x)=0$ sinon.

- Est-ce-que g est une densité ?
- Déterminer la densité de probabilité f qui est proportionnelle à g.
- Déterminer $P(1/2 < X < 1)$ où X est une variable aléatoire de densité de probabilité f

Espérance d'une variable aléatoire abs. continue

- Pour une variable discrète

$$E[X] = \sum_{x \in D} d\, P(X = d)$$

- Pour une variable abs. continue, si l'intégrale existe on a :

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

Exercice 4.7

Trouver E[X] lorsque la densité de probabilité de X est f définie par :

$f(t)=e^{-t}$ pour tout $t>=0$ et

$f(t)=0$ pour tout $t<0$

Exercice 4.8 :

Montrez que, comme dans le cas discret :

$E[aX+b] = aE[X]+b$

Fonction d'une v.a. continue

Théorème (non démontré)

Si X est une variable aléatoire continue de densité f(x), si g est une fonction réelle, si g(X) est une v.a. continue et si elle a une espérance alors

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x)dx$$

Exercice 4.9

La densité de probabilité de X est donnée par $f(x)=1/2$ si $0 \leq x \leq 2$, et $f(x)=0$ sinon.

Déterminer $E[X]$ et $E[e^X]$

Espérance d’une somme de v.a. abs. continues

Comme dans le cas discret :

$E[X+Y] = E[X] + E[Y]$

Mais ce n’est pas évident à montrer !

(fait plus loin)

Variance d'une v.a. abs. continue

De même que dans le cas discret on défini la variance de X comme étant égale (si elle existe) à l'espérance de $(X-E[X])^2$.

Comme dans le cas discret, on a (même preuve) :

$$Var(X)=E[X^2]-(E[X])^2$$

Par ailleurs, on a (d'après le théorème sur E[g(X)]) :

$$E\left[X^2\right]=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx$$

Exercice 4.10

Soit la variable aléatoire continue de densité de probabilité $f(x)=2x$ si $0 \leq x \leq 1$, et 0 sinon.

Déterminer l'espérance et la variance de X

Lois usuelles

- Loi uniforme
- loi normale
- loi exponentielle

Loi uniforme = densité constante

Soit [a,b] un sous-ensemble de R de longueur c=b-a

- La loi uniforme sur [a,b] a pour densité de probabilité f(x)=1/(b-a) pour tout x de [a,b] et 0 ailleurs.

Pour tout intervalle $[x-\varepsilon/2, x+\varepsilon/2]$ inclus dans [a,b], on $P([x-\varepsilon/2, x+\varepsilon/2]) = \varepsilon/(b-a)$.

Exercice 4.11

- Vérifier que f est bien une densité de probabilité
- Calculer l'espérance et la variance de la loi uniforme

Exercice 4.12

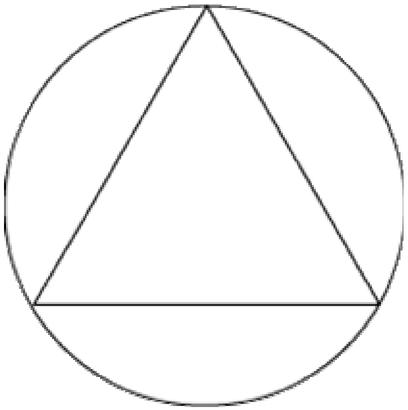
- Entre 7h et 19h, un bus s’arrête tous les quarts d’heure à un certain arrêt.
- Un usager se présente entre 8h et 8h30 à cet arrêt, son heure exacte d’arrivée suivant une loi uniforme sur cet intervalle
- Quelle est la probabilité pour qu’il attende moins de 5mn ? Plus de 10mn?

Exercice 4.13

- On trace sur le sol des lignes parallèles équidistantes séparées de 10cm. On laisse tomber au hasard une aiguille de la même longueur sur le sol. En énonçant les hypothèses nécessaires,trouver la probabilité pour que l’aiguille touche une des lignes.

Exercice 4.14

On choisit au hasard une corde dans un cercle. Quelle est la probabilité pour que la longueur de cette corde soit supérieure à celle du coté du triangle équilatéral inscrit dans ce cercle ?



Exercice 4.14 suite

- Que signifie ici au hasard ?
- Différentes interprétations = différents résultats?
- Explication?

Loi Normale

Une variable aléatoire X suit une loi normale de paramètre m$\in$ R et $\sigma\in$ R $^+$ si sa densité de probabilité vaut :

$$f(x) = \frac{e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}}$$

Loi normale standard (centrée normée)

Le cas particulier où $m = 0$ et $\sigma = 1$ correspond à la loi normale standard.

La densité de probabilité est alors

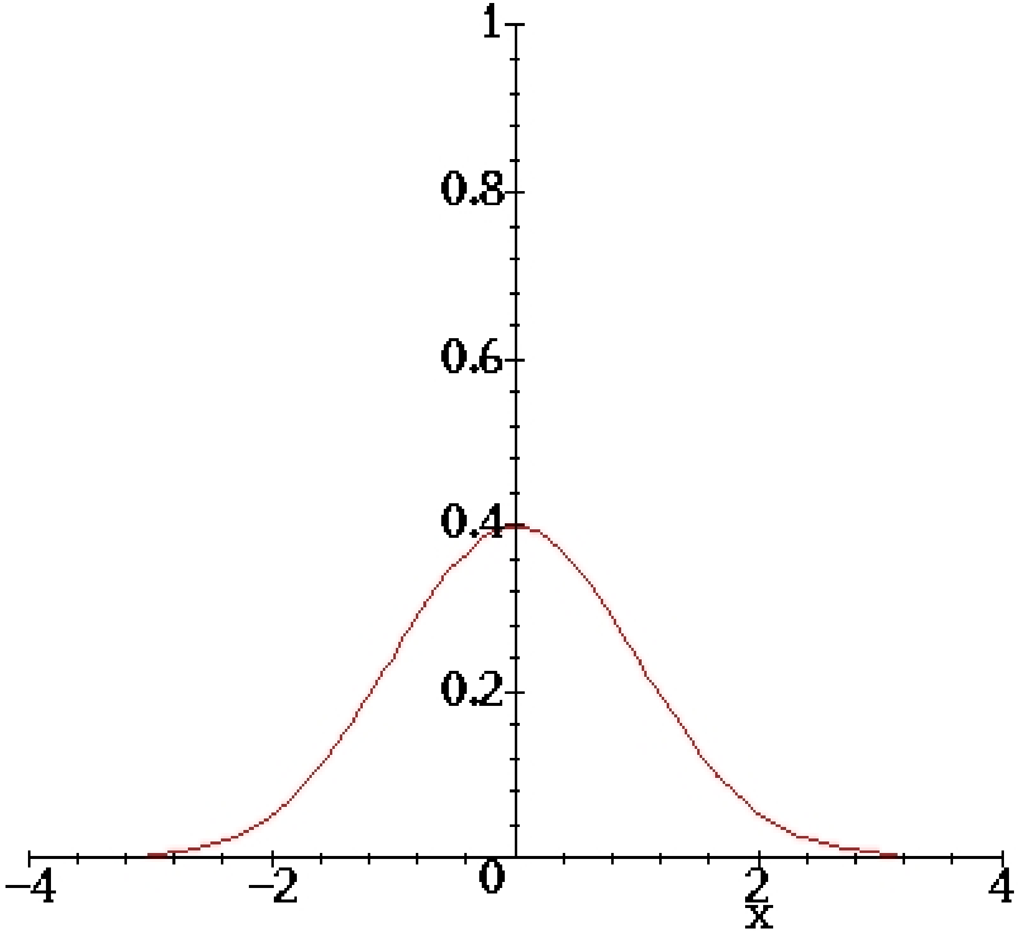
$$f(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$$

Exercice 4.15

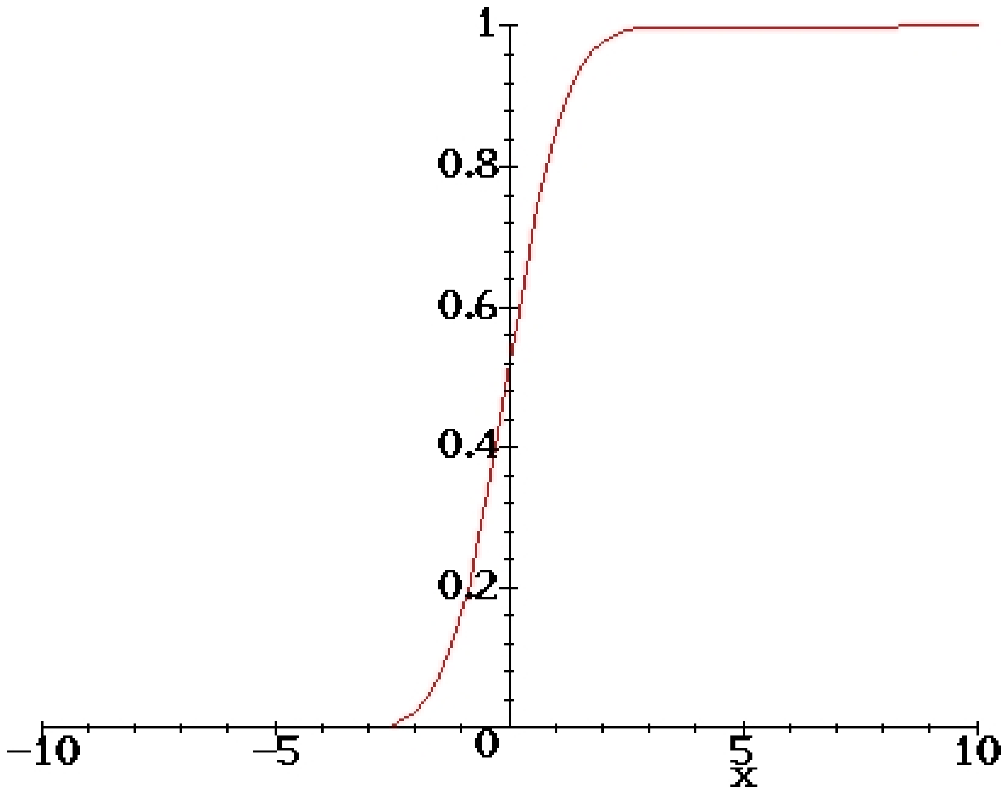
- Montrez qu'il s'agit bien de deux densités de probabilité

Exercice 4.16 : déterminez moyennes, variances, écart-types des lois normales

Fonction de densité de la loi normale standard



Fonction de répartition Φ de la loi normale standard



Propriétés de la fonction de répartition Φ

- $\Phi(-x)=1-\Phi(x)$ pour tout x

  (car la loi normale est une fonction paire d'intégrale 1 sur R)

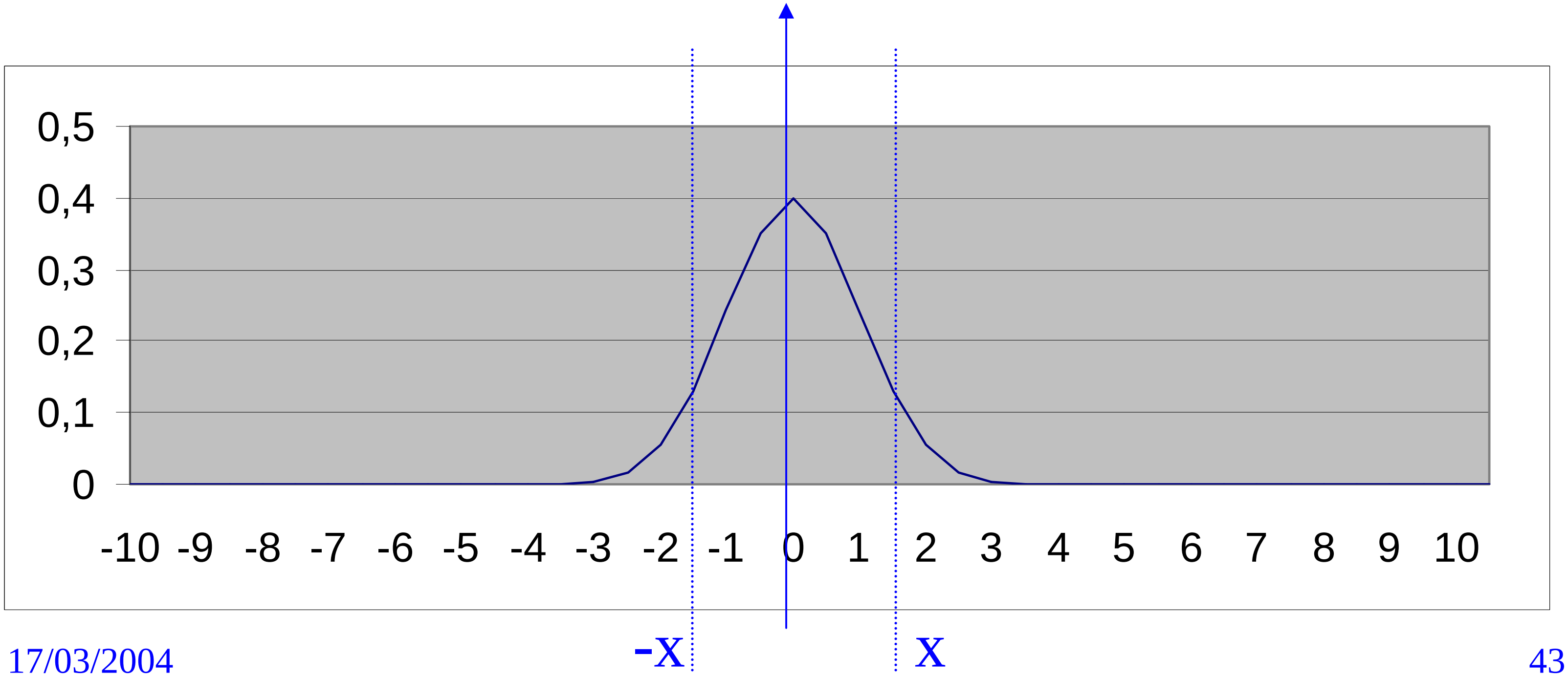


Table de la fct. de répartition pour la loi normale standard

0,5	**0**	**0,01**	**0,02**	**0,03**	**0,04**	**0,05**	**0,06**	**0,07**	**0,08**	**0,09**
0	0,5	0,50398938	0,50797835	0,51196653	0,5159535	0,51993887	0,52392225	0,52790324	0,53188144	0,53585646
0,1	0,5398279	0,54379536	0,54775847	0,55171682	0,55567003	0,55961771	0,56355947	0,56749493	0,57142371	0,57534542
0,2	0,57925969	0,58316613	0,58706439	0,59095407	0,59483482	0,59870627	0,60256806	0,60641981	0,61026119	0,61409182
0,3	0,61791136	0,62171946	0,62551577	0,62929995	0,63307167	0,63683059	0,64057637	0,6443087	0,64802724	0,65173168
0,4	0,6554217	0,65909699	0,66275724	0,66640215	0,67003142	0,67364476	0,67724187	0,68082248	0,6843863	0,68793305
0,5	0,69146247	0,69497428	0,69846823	0,70194406	0,70540151	0,70884034	0,71226032	0,71566119	0,71904274	0,72240472
0,6	0,72574694	0,72906915	0,73237117	0,73565277	0,73891377	0,74215396	0,74537315	0,74857118	0,75174784	0,75490298
0,7	0,75803642	0,76114801	0,76423758	0,76730498	0,77035008	0,77337272	0,77637278	0,77935012	0,78230463	0,78523618
0,8	0,78814467	0,79102997	0,79389201	0,79673067	0,79954586	0,80233751	0,80510553	0,80784984	0,81057039	0,81326709
0,9	0,81593991	0,81858877	0,82121365	0,82381448	0,82639124	0,82894389	0,8314724	0,83397676	0,83645694	0,83891294
1	0,84134474	0,84375235	0,84613576	0,84849498	0,85083003	0,85314092	0,85542767	0,85769031	0,85992888	0,86214339
1,1	0,8643339	0,86650044	0,86864307	0,87076184	0,8728568	0,87492801	0,87697554	0,87899946	0,88099983	0,88297674
1,2	0,88493027	0,88686049	0,8887675	0,89065138	0,89251224	0,89435016	0,89616525	0,89795762	0,89972737	0,90147461
1,3	0,90319945	0,90490202	0,90658243	0,9082408	0,90987727	0,91149195	0,91308498	0,91465649	0,91620662	0,91773551
1,4	0,91924329	0,92073011	0,92219611	0,92364144	0,92506626	0,9264707	0,92785492	0,92921909	0,93056334	0,93188785
1,5	0,93319277	0,93447826	0,93574449	0,93699162	**0,93821981**	0,93942923	0,94062005	0,94179244	0,94294656	0,9440826
1,6	0,94520071	0,94630108	0,94738387	0,94844926	0,94949743	0,95052855	0,95154279	0,95254034	0,95352137	0,95448605
1,7	0,95543457	0,9563671	0,95728382	0,9581849	0,95907053	0,95994089	0,96079614	0,96163648	0,96246207	0,9632731
1,8	0,96406973	0,96485216	0,96562055	0,96637509	0,96711594	0,96784329	0,9685573	0,96925816	0,96994603	0,97062109
1,9	0,97128351	0,97193346	0,97257112	0,97319665	0,97381022	0,97441201	0,97500217	0,97558088	0,97614831	0,9767046
2	0,97724994	0,97778448	0,97830838	0,9788218	0,97932491	0,97981785	0,9803008	0,98077389	0,9812373	0,98169116
2,1	0,98213564	0,98257088	0,98299704	0,98341425	0,98382267	0,98422245	0,98461372	0,98499663	0,98537132	0,98573793
2,2	0,9860966	0,98644747	0,98679066	0,98712632	0,98745458	0,98777557	0,98808941	0,98839624	0,98869619	0,98898937

$$\Phi(1{,}5+0{,}04) = 0{,}93821981$$

Propriétés de Φ

- Utilisation des tables pour une loi normale non standard N(m,σ).

$$P(a < N(m,\sigma) < b) = \int_a^b \frac{e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}}dx$$

Par changement de variable : u=(x-m)/σ

$$P(a < N(m,\sigma) < b) = \int_{\frac{a-m}{\sigma}}^{\frac{b-m}{\sigma}} \frac{e^{-\frac{u^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}du$$

$$= \Phi((b-m)/\sigma) - \Phi((a-m)/\sigma)$$

Propriétés de Φ

- Utilisation des tables pour une loi normale non standard N(m,σ).

$$P(a < N(m,\sigma) < b) =$$
$$P((a-m)/\sigma < N(0,1) < (b-m)/\sigma)$$
$$= \Phi((b-m)/\sigma) - \Phi((a-m)/\sigma)$$

Exercice 4.17

L'intervalle de temps exprimé en heures entre deux « reboot » d'une certaine machine ayant un certain système d'exploitation suit une loi normale de paramètre m=3, sigma =2. On démarre un TD de 2 heures dans une salle où il y a 20 machines (on suppose qu'on a rebooté toutes les machines en début de TD). Quelle est la probabilité pour que le TD puisse se terminer sans qu'il y ait de reboot à faire ?

Exercice 4.18

- On suppose que la taille en centimètres d'un humain mâle de 25 ans suit une loi aléatoire normale de paramètre m=175 et sigma=6. Quel est le pourcentage des hommes de 25 ans ayant une taille supérieure à 185 cm ? Parmi les hommes mesurant plus de 180cm quel pourcentage mesure plus de 192 cm ?

Loi exponentielle

Une variable aléatoire réelle est dite exponentielle si sa densité de probabilité suit la loi

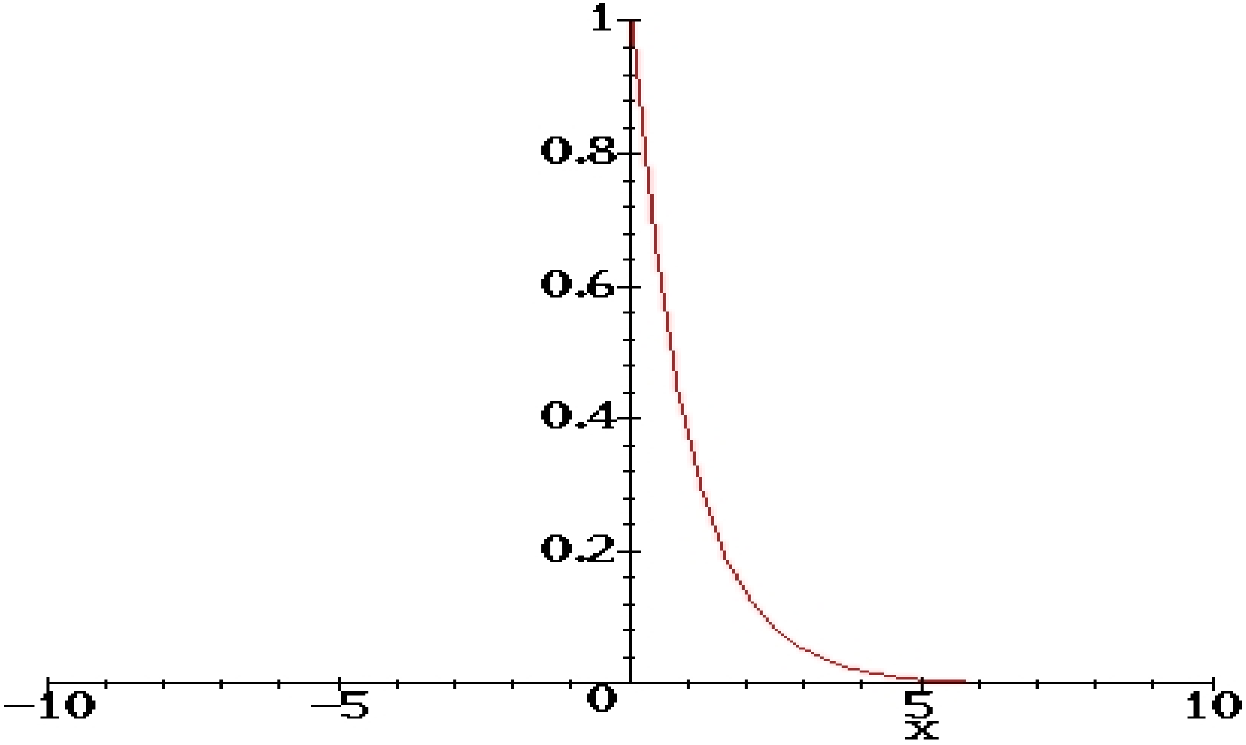
$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & si\ x\geq 0\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

où λ est une constante positive

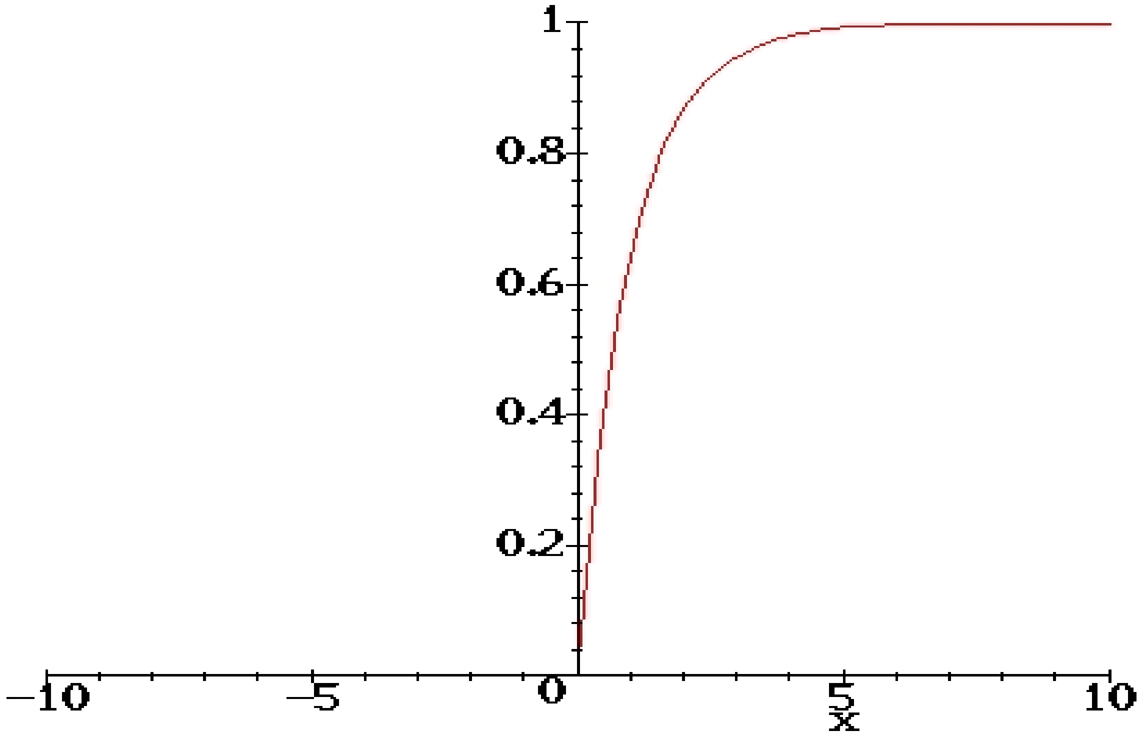
4.17 C'est bien une densité de probabilité, moyenne, variance

$E[Expo(\lambda)]=1/\lambda$ et $Var[Expo(\lambda)]=1/\lambda^2$

Densité de probabilité d 'une loi exponentielle



Fonction de répartition d 'une loi exponentielle



Exercice 4.20

On suppose que la durée d'une conversation téléphonique suit une loi exponentielle de paramètre 1/15. Vous arrivez à une cabine téléphonique et quelqu'un passe juste devant vous

Quelle est la probabilité pour que vous attendiez plus de 15 minutes? Entre 10 et 20 minutes?

Exercice 4.21

Montrer que la loi exponentielle est une loi sans mémoire, c'est-à-dire que

$P(X>s+t|X>s)=P(X>s)$, pour tout s, t positifs ou nuls

Exercice 4.22

- *La médiane d'une variable aléatoire continue ayant une fonction de répartition F est la valeur m telle que F(m)=1/2.*
- *Donnez une interprétation de cette valeur*
- *Déterminez m si X est :*
  - *Uniformément distribuée sur [a,b]*
  - *Normale de paramètre mu, sigma*
  - *Exponentielle de paramètre lambda*