

Examen de Probabilité.

Vendredi 30 avril 1999
durée 2heures
documents personnels autorisés

Le plus grand compte sera tenu de la qualité de la rédaction et de la précision du raisonnement. En particulier toute référence explicite et justifiée à des formules ou des propriétés vues en cours sera du meilleur effet!

Exercice 1. Histoire de Grecs. (8 pts.)

Dans l'île de Naxos, après s'être consolée sur l'épaule de Dionysos, Ariane se mit à observer les moeurs des natifs. Étant d'un naturel plutôt gai, elle choisit d'observer les grincheux! Quel ne fut pas son étonnement quand elle constata les faits troublants suivants :

- 21,19% des natifs se lèvent du pied gauche moins de 99 jours de l'année (qui rappelons le était bissextile),*
- 18,41% des natifs se lèvent du pied gauche plus de 150 jours de l'année,*
- 2,28% (les cas désespérés) se lèvent du pied gauche plus d'un jour sur deux.*

Mais oui, s'écria Ariane, mais c'est bien sûr, le nombre de jours dans l'année où un Naxossien se lève du pied gauche suit une loi de Gauss (roi de Samos, plus connu sous le nom de mecQuiInventaLaLoiNormale).

Pensez-vous qu'Ariane ait raison? Qu'est-ce qui vous permet de dire qu'elle n'a pas forcément tort? En supposant qu'elle ait raison, quelle est la moyenne et l'écart-type de cette loi normale.

Si on fait l'hypothèse que le nombre de jours dans l'année où un Naxossien se lève du pied gauche suit une loi de Gauss, chacune des trois données fournit une équation. Une loi normale a deux paramètres (moyenne, écart-type). Deux paramètres, trois équations ... on résout le système formé par deux équations, on reporte dans la troisième, si cette troisième équation n'est pas vérifiée, on est sûr que l'hypothèse était mauvaise.

Dans la table, on lit $-0,8$, $0,9$ et 2 . D'où les équations

$$99 - m = -0,8\sigma;$$

$$150 - m = 0,9\sigma;$$

$$183 - m = 2\sigma.$$

Ce qui donne une moyenne de 123 jours avec un écart-type de 30 jours.
L'hypothèse n'est pas forcément fausse!

Exercice 2. Un peu d'exotisme! (4 pts.)

La professeur Angel, à la suite de ses lointaines missions, prétend que les Gluons Tropicaux ont les caractéristiques suivantes:

	<i>poil lisse</i>	<i>poil frisé</i>
<i>yeux pédonculés</i>	18%	42%
<i>yeux non pédonculés</i>	12%	?

Pourcentages observés dans les différentes catégories

Elle ajoute: "les caractères yeux pédonculés et poil frisé sont indépendants!"

A-t-elle raison? Justifiez le.

La valeur manquante (yeux non pédonculés et poil frisé) était 28% pour que le total fasse 100%.

Pour le caractère yeux pédonculés on a $18\% + 42\% = 60\%$;

pour le caractère poil frisé on $42\% + 28\% = 70\%$.

Si les deux caractères sont indépendants on doit avoir:

$P(\text{yeux pédonculés et poil frisé}) = P(\text{yeux pédonculés}) * P(\text{poil frisé})$,
ce qui est le cas ($0,6 * 0,7 = 0,42$).

Exercice 3. Y a plus rien à lire! (8 pts.)

Le professeur Devil a pour habitude, le vendredi soir, d'aller s'acheter des revues pour le week-end. Il passe de manière équiprobable un nombre K d'heures chez le libraire, K pouvant prendre les valeurs 1, 2, 3 ou 4. Le nombre N de revues qu'il achète est aléatoire et dépend du temps qu'il a passé chez le marchand. On nous a dit que

$$P(N = n|K = k) = \frac{1}{k} ; \quad \forall n : 1 \leq n \leq k.$$

1. Donner la loi conjointe du couple de variables aléatoires (K, N) .
2. Donner la loi marginale de la variable aléatoire N .
3. Donner la loi de la variable aléatoire K conditionnée par $(N = 2)$.
4. Les revues coûtant en moyenne 3 Euros pièce, combien dépense-t'il en moyenne par semaine pour l'achat de ses revues.

1. Loi conjointe du couple de variables aléatoires (K, N) .

$$P(K = k \text{ et } N = n) = P(K = k) * P(N = n|K = k)$$

ce qui donne

$$P(K = k \text{ et } N = n) = \frac{1}{4 * k}; \quad \forall (k, n) \text{ avec } 1 \leq n \leq k \leq 4$$

K	1	2	3	4
N				
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{16}$
2	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{16}$
3	0	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{16}$
4	0	0	0	$\frac{1}{16}$

Le total fait 1!!!

2. En sommant par ligne, on obtient alors la loi marginale de N .

$$\begin{aligned}P(N = 1) &= \frac{25}{48}; \\P(N = 2) &= \frac{13}{48}; \\P(N = 3) &= \frac{7}{48}; \\P(N = 4) &= \frac{1}{16} = \frac{3}{48}.\end{aligned}$$

Le total fait 1!!!

3. La loi de la variable aléatoire K conditionnée par $(N = 2)$ est obtenue en appliquant la formule:

$$P(K = k | N = n) = \frac{P(K = k \text{ et } N = n)}{P(N = n)}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}P(K = 1 | N = 2) &= 0; \\P(K = 2 | N = 2) &= \frac{6}{13}; \\P(K = 3 | N = 2) &= \frac{4}{13}; \\P(K = 4 | N = 2) &= \frac{3}{13}.\end{aligned}$$

Le total fait 1!!!

4. Calcul de l'espérance de N :

$$E(N) = 1 * \frac{25}{48} + 2 * \frac{13}{48} + 3 * \frac{7}{48} + 4 * \frac{3}{48} = \frac{7}{4};$$

La valeur 1,75 a le bon goût d'être entre 1 et 4!

Le prix moyen d'une revue étant de 3 euros, la dépense moyenne sera de 5,25 euros.

Fonction de rpartition de la loi normale rduite centre

u	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986

Table pour les grandes valeurs de u

u	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,8	4,0	4,5
F(u)	0,99865	0,999032	0,999313	0,999517	0,999663	0,999767	0,999841	0,999928	0,999968	0,999997