ESSI 1
Jeudi 15 Juin 2000

Examen de probabilités

Vous devez impérativement rédiger vos solutions sur cette feuille.

Exercice 1

On lance une pièce de monnaie bien équilibrée 5 fois consécutives. On appelle séries de faces les groupes de faces F consécutifs obtenus . Par exemple l'épreuve (F,P,F,F,F) contient deux séries de faces. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de faces obtenues et Y la variable aléatoire égale au nombre de séries de faces.

1. Quelle est la loi de X, précisez espérance et variance.
2. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par Y. Pour tout i dans I et pour tout j dans {0,1,2,3,4,5} déterminer P(Y=i|X=j)
3. En déduire la loi conjointe du couple (X,Y)
4. X et Y sont-elles indépendantes ?

1. Loi de X

Soit Ω l'espace des épreuves, c'est à dire l'ensemble des mots de longueur 5 sur l'alphabet {F,P}.
X est une fonction de Ω dans {0,1,2 ,3,4 ,5}.
X est la loi binomiale B(5,1/2) donc E(X) = 5/2 et Vax(X) = 5/4

P(X=i)= $\dfrac{C_5^i}{2^5}$

i=	0	1	2	3	4	5
P(X=i)=	1/32	5/32	10/32	10/32	5/32	1/32

Notons X_i la variable aléatoire qui vaut 0 si la i-ème pièce tombe sur pile et 1 sinon.
X est égale à la somme des X_i pour i variant entre à et 5, et les variables aléatoires Xi sont indépendantes.
Chacune d'elle à pour espérance ½ et pour variance ¼. Donc l'espérance de X est 5/2 et sa variance 5/4.

2. Loi de Y conditionnée par X

Les valeurs possibles pour Y sont 0,1,2 et 3. En effet deux séries de faces distinctes doivent être séparées par au moins un pile.
Tableau de la loi conditionnée (attention ceci n'est pas une table de loi conjointe ! !)

P(Y=i|X=j)	i=0	i=1	i=2	i=3	Somme par ligne
j=0	1	0	0	0	1
j=1	0	1	0	0	1
j=2	0	2/5	3/5	0	1
j=3	0	3/10	6/10	1/10	1
j=4	0	2/5	3/5	0	1
j=5	0	1	0	0	1

En effet , pour chaque j, la ligne j donne les valeurs de la probabilité P(Y=i|X=j) donc la somme par ligne vaut 1, en revanche la somme en colonne n'a aucune raison de valoir 1.
Si l'on sait qu'il y a 0 face de sorties, alors il y a aussi 0 série de faces. De même s'il y a une face de sortie, il y a forcément une série de faces.
S'il y a 2 faces, il y a une ou deux séries de faces . Or il y a dix manières de positionner les 2 faces sur les 5 lancés. 4 de ces 10 manières font une seule série de faces (FFPPP,PFFPP,PPFFP,PPPFF) les 6 autres font deux séries de faces.
S'il y a trois faces, il y a 10 manières de positionner ces 3 faces sur les 5 lancés et au moins une série. Il y a 3 manières (FFFPP,PFFFP,PPFFF) d'obtenir une seule série de faces, il y a une seule manière d'obtenir 3 séries de

faces (FPFPF), et donc les autres 6 résultats permettent d'obtenir 2 séries de faces (FFPFP,FFPPF,FPFFP,FPPFF,PFPFF,PFFPF).
S'il y a 4 faces, il y a 1 ou 2 séries. Soit les 4 faces sont consécutives (2 positions possibles pour le Pile en tête ou en fin), soit elles sont séparées en 2 par un pile (3 positions possibles pour le pile)
S'il y a 5 faces sorties il y a forcément une seule série de faces.

3. Loi conjointe

On va utiliser le fait que $P(Y=i \wedge X=j) = P(Y=i | X=j)P(X=j)$

P(Y=i et X=j)	i=0	i=1	i=2	i=3	P(X=j)
j=0	1/32	0	0	0	1/32
j=1	0	5/32	0	0	5/32
j=2	0	1/8	3/16	0	5/16
j=3	0	3/32	3/16	1/32	5/16
j=4	0	1/16	3/32	0	5/32
j=5	0	1/32	0	0	1/32
P(Y=j)	1/32	15/32	15/32	1/32	1

4. Indépendance

Les deux variables ne sont pas indépendantes car sinon dans le tableau 2, il y aurait la même valeur dans chaque case d'une même colonne.
On peut aussi par exemple vérifier que la probabilité pour que X=0 et Y=0 n'est pas égale au produit de la probabilité pour que X=0 par la probabilité que Y=0.

Exercice 2

Un laboratoire doit analyser N=gn prélèvements pour déterminer ceux qui contiennent un corps C donné. Pour tout i entier dans l'intervalle [1,N], soit Ei l'événement : le prélèvement numéro i contient le corps C. On suppose que les évènements Ei sont indépendants et ont tous la même probabilité p.
On répartis les N prélèvements en g groupes de taille n et pour chaque groupe on constitue un mélange. On teste la présence de C dans ce mélange. S'il est absent du mélange, on aura établi en une seule analyse qu'aucun des n prélèvements ne contient C, s'il est présent, on teste séparément les n échantillons pour déterminer celui ou ceux d'entre eux qui contiennent le corps C. On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre total d'analyses effectuées. Déterminez l'espérance de X.

Notons X_i la variable aléatoire égale au nombre d'analyses effectuées pour le ième groupe. On à $X=X_1+X_2+\ldots X_g$. Comme tous les Xi suivent la même loi, on a donc $E[X]=gE[X_1]$.

Calculons $E[X_1]$. X_1 vaut 1 si aucun des n prélèvements ne contient le corps C, donc avec probabilité $(1\text{-}p)^n$, et vaut 1+n avec probabilité $1-(1-p)^n$, donc $E[X_1]= (1-p)^n+(1+n)(1- (1-p)^n)=1+n(1-(1-p)^n)$.

On a donc $E[X]=g+ng(1-(1-p)^n)$.
On vérifie que si n est « grand » et p « petit », E[X] est « proche » de g et « très inférieur » à N qui est le nombre d'analyses faites en testant tous les prélèvements.

Exercice 3

La ville de ToutPar4 est organisée de la manière suivante :

- La ville est composée de 4 quartiers : Nord, Sud, Est, Ouest
- Chaque quartier comporte 4 résidences
- Chaque résidence comporte 4 immeubles
- Chaque immeuble à 4 étages
- A chaque étage il y a quatre appartements
- 4 personnes vivent dans chaque appartement.

A ToutPar4 , les décisions sont prise de la manière suivante : chaque fois qu'un proposition P est faite, Dans chaque appartement les 4 habitants discutent entre eux et envoient un représentant de l'appartement à l'assemblée de l'étage. Le représentant de l'appartement est pour P si et seulement au moins 3 des 4 habitants sont pour (on considère qu'en cas d'égalité deux pour deux contre, ce sont toujours les partisans du contre qui finissent par convaincre les autres).

A chaque assemblée d'étage les représentant des appartements discutent entre eux et envoient un représentant de l'étage à l'assemblée des étages. Ici aussi le représentant de l'étage est pour P si et seulement si au moins 3 des représentants des appartements sont pour P.

De même l'assemblée des étages envoie un représentant à l'assemblée immeubles qui envoie un représentant à l'assemblée des résidence qui envoie un représentant à l'assemblée des quartiers qui va enfin pouvoir faire le vote final.

On suppose que les habitants approuvent la proposition P de manière indépendante avec probabilité p1.
1. Quelle est la probabilité p2 pour que le représentant d'un appartement approuve P ?
2. Sous quelle condition a-t-on p2>p1
3. Pourquoi l'autre nom de ToutPar4 est-il CestPasSouventQuOnVotePour ?
4. Pourquoi la commune voisine ToutPar3 est elle aussi connue sous le nom de ChezNousCaMarcheMieux?

1. Le représentant d'un appartement approuve la proposition P si 3 habitants ou 4 habitants de l'appartement l'approuve donc $p_2=p_1^4+4\,(1-p_1)p_1^3$
2. On a p2>p1, si et seulement si $p_1^4+4\,(1-p_1)p_1^3> p_1$,
C'est à dire $4p_1^3-3\,p_1^4-\,p_1>0$, c'est à dire $p_1(1-p_1)(3p_1^2-\,p_1-1)>0$, c'est à dire $(3p_1^2-\,p_1-1)>0$

On doit donc avoir p1 au moins égal à $\dfrac{1+\sqrt{13}}{6}\approx 0{,}767$

3.Parce que si l'on nomme p3 la probabilité pour que le représentant de l'étage vote la proposition, si l'on nomme p4 la probabilité pour que le représentant de l'immeuble vote la proposition,
si l'on nomme p5 la probabilité pour que le représentant de la résidence vote la proposition
si l'on nomme p6 la probabilité pour que le représentant du quartier vote la proposition
et p7 la probabilité pour que la proposition soit finalement adoptée, on a

$p_{i+1}=p_i^4+4\,(1-p_i)p_i^3$, et pour que p7 soit supérieure ou égal à ½ on doit avoir p1>0,757, i.e. la proposition est adoptée avec une probabilité supérieure ou égal à ½ seulement si plus des ¾ des habitants approuvent cette proposition.