Probabilités ESSI1
Chapitre 4 : variables aléatoires continues

Exercice 4.11
La loi uniforme sur [a,b] a pour densité de probabilité f(x)=1/(b-a) pour tout x de [a,b] et 0 ailleurs.
Vérifier que f est bien une densité de probabilité
Calculer l'espérance et la variance de la loi uniforme

f(x) est bien positif ou nul, et son intégrale sur a,b est bien égale à 1

E[X]= $$\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt = \int_a^b \frac{t}{b-a}dt = \left[\frac{t^2}{2(b-a)}\right]_0^1 = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{b+a}{2}$$

E[X^2]=

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)dt = \int_a^b \frac{t^2}{b-a}dt = \left[\frac{t^3}{3(b-a)}\right]_0^1 = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} = \frac{b^2+ab+a^2}{3}$$

Et donc Var(X)= $= \dfrac{(b-a)^2}{12}$

Exercice 4.12
Entre 7h et 19h, un bus s'arrête tous les quarts d'heure à un certain arrêt.
Un usager se présente entre 8h et 8h30 à cet arrêt, son heure exacte d'arrivée suivant une loi uniforme sur cet intervalle
Quelle est la probabilité pour qu'il attende moins de 5mn ? Plus de 10 mn?

Soit X le nombre de minutes qui s'écoulent entre 8h et l'heure d'arrivée de l'usager. X est uniformément réparti sur l'intervalle [0,30].
L'attente de l'usager est de moins de 5 minutes, si X est dans [10,15] U [25,30]. La probabilité qu'il attende moins de 5 minutes est donc égale à

$$P(10 < X < 15) + P(25 < X < 30) = \int_{10}^{15} \frac{1}{30}dt + \int_{25}^{30} \frac{1}{30}dt = \frac{1}{3}$$

De même la probabilité pour qu'il attente plus de 10 minutes est égale à

$$P(0 < X < 5) + P(15 < X < 20) = \int_0^5 \frac{1}{30} dt + \int_{15}^{20} \frac{1}{30} dt = \frac{1}{3}$$

Exercice 4. 13 NB : cet e NB : cet exercice est hors programme cette année
On trace sur le sol des lignes parallèles équidistantes séparées de 10cm. On laisse tomber au hasard une aiguille de la même longueur sur le sol. En énonçant les hypothèses nécessaires, trouver la probabilité pour que l'aiguille touche une des lignes.

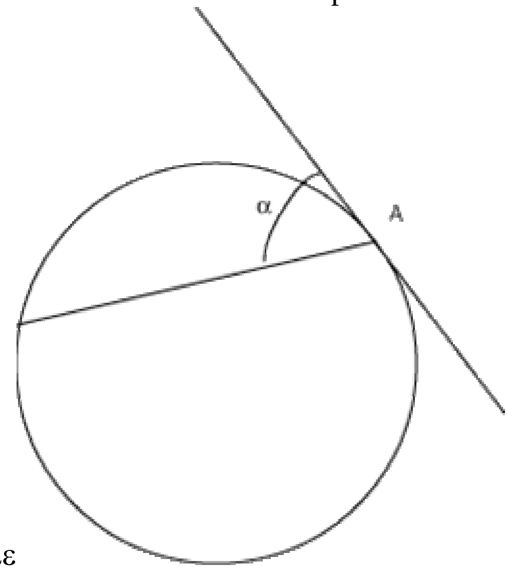
Supposons que les lignes soient verticales et séparées par une distance d=10cm. Soit P le centre de l'aiguille, x la plus petite distance entre P et une ligne verticale et θ l'angle faite par l'aiguille avec une ligne horizontale. L'aiguille touche une ligne verticale si $x < d \cos \theta$. Les variables aléatoires x et θ sont indépendantes et équiréparties, x variant entre 0 et d/2 et θ entre 0 et $\pi/2$. On en déduit que les densités de probabilité f_x et f_θ satisfont $f_x(a) = 2/d$ et
$f_\theta(\alpha) = 2/\pi$. La probabilité pour que l'aiguille touche une ligne verticale est donc

$P(\theta<\alpha, x< d/2\cos\theta)=P(\theta < \alpha)P(x<d/2\cos \alpha)=\frac{4}{d\pi}\int_0^{\pi/2} d\alpha \int_O^{d/2\cos\alpha} dx = 2/\pi$

Exercice 4.14
On choisit au hasard une corde dans un cercle. Quelle est la probabilité pour que la longueur de cette corde soit supérieure à celle du coté du triangle équilatéral inscrit dans ce cercle ?

Choisir une corde au hasard n'est pas une bonne spécification du problème :
1ere interprétation : la distance d entre la corde et le centre du cercle est choisie uniformement entre 0 et R, le rayon du cercle. Dans ce cas, la longueur de la corde est supérieure à celle du coté du triangle équilatéral inscrit si et seulement si d est inférieur ou egal à R/2, ce qui arrive avec probabilité ½. Cette hypothèse est réaliste si l'on considère l'experience : lancer une piece de rayon R, sur une table comportant des droites parallèles espacées de 2R.

$2^{\text{ième}}$ interprétation : l'angle alpha entre la corde et la tangente au cercle en l'une de ses extrémités est choisie au hasard, entre 0 et 180°. Dans ce cas la longueur de la corde est supérieure si l'angle est compris entre 60 et 120 degrés. La probabilité est donc de 1/3. Cette hypothèse est réaliste si l'on considère l'experience : faire tourner une aiguille à partir d'un



ποιντ Α δυ χερχλε

Exercice 4.15

Densité d'une loi normale est bien une densité

$$f(x) = \frac{e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}}$$

f(x) est bien toujours positif ,il suffit de montrer que

$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\frac{-(x-m)^2}{2\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}} dx = 1$. En effectuant le changement de variable y =x-m/σ, il faut montrer que $J = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-y^2}{2}} dy = \sqrt{2\pi}$.

Or $J^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-y^2}{2}} dy \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-x^2}{2}} dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dxdy$

Passons aux coordonnées polaires : x=rcosθ, y=rsinθ, dxdy=rdrdθ,

$$J^2 == \int_0^{+\infty}\int_0^{2\pi} e^{-\frac{r^2}{2}} rdrd\theta = \left[-2\pi e^{-\frac{r^2}{2}} \right]_0^{+\infty} = 2\pi$$

Exercice 4.16

Déterminez moyennes, variances, écart-types des lois normales.

Si X est est une loi normale de paramètre m et σ, on a

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{\frac{-(x-m)^2}{2\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}} dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} xe^{\frac{-(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (x-m)e^{\frac{-(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx + \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} me^{\frac{-(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} ye^{\frac{-(y)^2}{2\sigma^2}} dy + \frac{m}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx$$

$$= 0 + m$$

La moyenne d'une loi normale est donc m, c'est donc 1 pour une loi normée

$$Var[X] = E[(X-m)^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-m)^2 e^{\frac{-(x-m)^2}{2\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}} dx$$

En posant y = (x-m)/σ

On obtient

$$Var[X] = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 e^{\frac{-y^2}{2}} dx =$$

$$\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \left(\left[-ye^{\frac{-y^2}{2}} \right]_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-y^2}{2}} dx \right) = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-y^2}{2}} dx \right) = \sigma^2$$

L'écart type est donc égal à σ.

Exercice 4.17

L'intervalle de temps exprimé en heures entre deux « reboot » d'une certaine machine ayant un certain système d'exploitation suit une loi normale de paramètre m=3, sigma =2. On démarre un TD de 2 heures dans une salle où il y a 20 machines (on suppose qu'on a rebooté *toutes les machines en début de TD). Quelle est la probabilité pour que le TD puisse se terminer sans qu'il y ait de reboot à faire ?*

Le temps entre deux reboot pour chaque machine suit la loi N(3,2).

La proba que ce temps soit supérieur à 2 est :

P(N(3,2)>2) = 1- P(N(3,2)<2)

= 1- Φ((2-3)/2) = Φ(1/2) = 0,69146247.

La proba pour qu'aucune des 20 machines n'ait à être rebootée pendant ces 2 heures est $[P(N(3,2)>2)]^{20}$

(évènements indépendants).

Ce qui donne : (0,69146247)20 = 0,00062427

Exercice 4.18

On suppose que la taille en centimètres d'un humain mâle de 25 ans suit une loi aléatoire normale de paramètre m=175 et sigma=6. Quel est le pourcentage des hommes de 25 ans ayant une taille supérieure à 185 cm ? Parmi les hommes mesurant plus de 180cm quel pourcentage mesure plus de 192 cm ?

P(T>185) = 1- P(T<185) = 1- Φ((185-175)/6) = 1 - 0,95220967 = 0,05

P(T>192 / T>180) = P(T>192)/P(T>180)

= (1- Φ((192-175)/6))/ (1- Φ((180-175)/6))

= 0,00230333/0,20232832 = 0,01

Exercice 4.19

Loi exponentielle, la densité en est bien une, espérance, variance

$$\int_0^{+\infty} \lambda\, e^{-\lambda x} dx = [-e^{-\lambda x}]_0^{+\infty} = 1$$ (donc c'est bien une densité)

$$\int_0^{+\infty} x\lambda\, e^{-\lambda x} dx =$$ (par une intégration par parties)

$$[-xe^{-\lambda x}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx = 0 + [\frac{-1}{\lambda} e^{-\lambda x}]_0^{+\infty} = 1/\lambda$$

Exercice 4.20

On suppose que la durée d'une conversation téléphonique suit une loi exponentielle de paramètre 1/15. Vous arrivez à une cabine téléphonique et quelqu'un passe juste devant vous Quelle est la probabilité pour que vous attendiez plus de 15 minutes? Entre 10 et 20 minutes?

La probabilité d'attendre plus de 15 minutes est

$$\int_{1/\lambda}^{+\infty} \lambda\, e^{-\lambda x} dx = [-e^{-\lambda x}]_{1/\lambda}^{+\infty} = 1/e$$

La probabilité d'attendre entre 10 et 20 minutes est

$$\int_{10}^{20} \lambda\, e^{-\lambda x} dx = [-e^{-x/15}]_{10}^{20} = e^{\frac{-2}{3}} - e^{\frac{-4}{3}}$$

Exercice 4.21

Montrer que la loi exponentielle est une loi sans mémoire, c'est-à-dire que P(X>s+t|X>s)=P(X>t), pour tout s, t positifs ou nuls

En effet

P(X>s+t|X>s)= $\dfrac{P(X > s+t \cap X > s)}{P(X > s)} = \dfrac{P(X > s+t)}{P(X > s)} =$

$$\frac{\int_{s+t}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx}{\int_{s}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx} = \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda s}} = e^{-\lambda t} = P(X > t)$$

Exercice 4.22

La médiane d'une variable aléatoire continue ayant une fonction de répartition F est la valeur m telle que F(m)=1/2.

a) Donnez une interprétation de cette valeur

b) Déterminez m si X est

- *Uniformément distribuée sur [a,b]*
- *Normale de paramètre mu, sigma*
- *Exponentielle de paramètre lambda*

a) On a autant de chance d'avoir une valeur supérieure à m qu'une valeur inférieure à m.

- Si X est uniformément distribuée sur [a,b], F(x)=(x-a)/(b-a) pour tout x de l'intervalle. La valeur médiane est donc (a+b)/2
- On sait que la densité est symétrique par rapport à x=mu, donc m=mu
- Puisque F(t)= F(t)=1- e $^{-\lambda t}$, la valeur médiane est m=ln(2)/λ. C'est le seul des trois cas ou la médiane et la moyenne sont distinctes.