

Probabilités ESSI1

Chapitre 4 : variables aléatoires continues

Exercice 4.1

Soit X une v.a. réelle.

Montrez que $P(X=a)=0$ pour presque tous les a de $\mathbb{R}$.

On pourra considérer
$$\bigcup_{n>0} \{a / P(X = a) > 1/n\}$$

Quel est l'ensemble des réels a tels que : $P(X=a) > 0$?

D'une part, $P(X=a) > 1/n$ pour au plus $(n-1)$ réels a

D'autre part, $\{a : P(X=a) > 0\} = \bigcup_{n>0} \{a : P(X=a) > 1/n\}$

C'est une union dénombrable d'ensembles finis, donc un ensemble dénombrable.

Exercice 4.2

Donner un ensemble infini non dénombrable d'événements E_a , $0 < a < 1$, ayant la propriété que $P(E_a)=1$ pour tout a , mais que $P(\cap E_a)=0$

On peut par exemple choisir une variable aléatoire X de une loi uniforme sur $[0,1]$ et les événements $E_a = \{X \neq a\}$

Exercice 4.3 :

X est une variable aléatoire continue dont la densité est

$$f(x) = \begin{cases} C(4x - 2x^2) & 0 < x < 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Déterminez C

On doit avoir
$$\int_0^2 C(4x - 2x^2) dx = 1, \text{ et donc } \left[C(2x^2 - \frac{2}{3}x^3) \right]_0^2 = 1$$

Donc $C=3/8$

Exercice 4.4

La durée de vie d'une ampoule électrique exprimée en Kilo heure est une variable aléatoire dont la densité de probabilité est une fonction $f(t)=e^{-t}$ pour tout $t \geq 0$ et $f(t)=0$ pour tout t négatif

Quelle est la probabilité pour que l'ampoule soit encore en vie après 2000 heures ?
 Si l'on a deux ampoules de ce type, quelle est la probabilité pour qu'au bout de 2000 heures l'une exactement soit encore en vie ?

La probabilité pour que l'ampoule soit encore en vie après 2000 heures est égale à

$$P(T > 2) = \int_2^{+\infty} e^{-t} dt = \left[-e^{-t} \right]_2^{+\infty} = e^{-2}$$

La probabilité pour que l'une des deux exactement soit encore en vie est de $2e^{-2}(1 - e^{-2})$

Exercice 4.5

Vérifier que les fonctions des exercices 4.3 et 4.4 sont bien des densités de probabilité

Pour l'exercice 4.3 il reste seulement à vérifier que $f(x)$ est positif ou nul, ce qui est vrai.

Pour l'exercice 4.4, il est clair que $f(t)$ n'est jamais négatif, reste à vérifier que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = \left[-e^{-t} \right]_0^{+\infty} = 1$$

Exercice 4.6

Soit g définie par : $g(x) = x^2(1 - x)$ pour $0 < x < 1$, $g(x) = 0$ sinon.

Est-ce que g est une densité ?

Déterminer la densité de probabilité f qui est proportionnelle à g .

Déterminer $P(1/2 < X < 1)$ où X est une variable aléatoire de densité de probabilité f

Non ce n'est pas une densité, car s'il est vrai que $g(x)$ est positif ou nul pour tous les x , il n'est

pas vrai que $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t) dt = 1$, en fait,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t) dt = \int_0^1 x^2(1 - x) dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = 1/12$$

En revanche la fonction $f(t) = 12g(t)$ est bien une densité de probabilité

$$\text{Et } P(1/2 < X < 1) = 12 \int_{1/2}^1 x^2(1 - x) dx = 12 \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_{1/2}^1 = 11/16$$

Exercice 4.7

Trouver $E[X]$ lorsque la densité de probabilité de X est f définie par :

$f(t) = e^{-t}$ pour tout $t \geq 0$ et

$f(t)=0$ pour tout $t < 0$

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt = \int_0^{+\infty} t e^{-t} dt = \left[-te^{-t} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$$

Exercice 4.8

Montrer que comme dans le cas discret $E[aX+b] = aE[X]+b$

On peut faire une preuve directe, en montrant que si la fonction $t \rightarrow f(t)$ est densité de X alors :

- la fonction $t \rightarrow f(t/a)/a$ est densité de aX
- la fonction $t \rightarrow f(t-b)$ est densité de $X+b$

et on peut ensuite appliquer la définition de l'espérance à la v.a. $aX+b$

On peut aussi utiliser le résultat (admis en cours) sur $E[g(X)]$ avec $g(x) = ax+b$.

Exercice 4.9

La densité de probabilité de X est donnée par

$f(x)=1/2$ si $0 \leq x \leq 2$, et $f(x)=0$ sinon.

Déterminer $E[X]$ et $E[e^X]$

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt = \int_0^2 \frac{t}{2} dt = \left[\frac{t^2}{4} \right]_0^2 = 1$$

$$E[e^X] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^t f(t) dt = \int_0^2 \frac{e^t}{2} dt = \left[\frac{e^t}{2} \right]_0^2 = \frac{e^2 - 1}{2}$$

Exercice 4.10

Soit la variable aléatoire continue de densité de probabilité $f(x)=2x$ si $0 \leq x \leq 1$, et 0 sinon.

Déterminer l'espérance et la variance de X

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt = \int_0^1 2t^2 dt = \left[\frac{2}{3} t^3 \right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t) dt = \int_0^1 2t^3 dt = \left[\frac{1}{2} t^4 \right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

Donc $\text{Var}(X) = 1/2 - 4/9 = 1/18$