Probabilités ESSI1
Chapitre 3 : variables aléatoires discrètes

Exercice 3.1 : *Montrer que la fonction de répartition d'une variable aléatoire est toujours croissante, et vérifie* $\lim_{x\to+\infty} F(x)=1,$

Par définition F(x)=P(X <=x), donc si x<y, F(x) <=F(y).

On a $\bigcup_{n=-\infty}^{+\infty}]n,n+1]=\mathrm{R}$

$$P(\bigcup_{n=-\infty}^{+\infty}]n,n+1])=P(\mathrm{R})=1$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} P(]n,n+1])=\lim_{n\to+\infty}\sum_{m=-\infty}^{n} P(]m,m+1])$$

$$=\lim_{n\to+\infty} P(\bigcup_{m=-\infty}^{n}]m,m+1])=\lim_{n\to+\infty} P(]-\infty,n+1])$$

$$=\lim_{n\to+\infty} F(n+1)$$

Comme F est croissante, on en déduit $\lim_{x\to+\infty} F(x)=1,$

Exercice 3.2

La fonction de répartition d'une variable X est donnée par

$$F(b)=\begin{cases} 0 & b<0 \\ 1/2 & 0\le b<1 \\ 3/5 & 1\le b<2 \\ 4/5 & 2\le b<3 \\ 9/10 & 3\le b<3,5 \\ 1 & b\ge 3,5 \end{cases}$$

Quelle est la loi de probabilité de X?

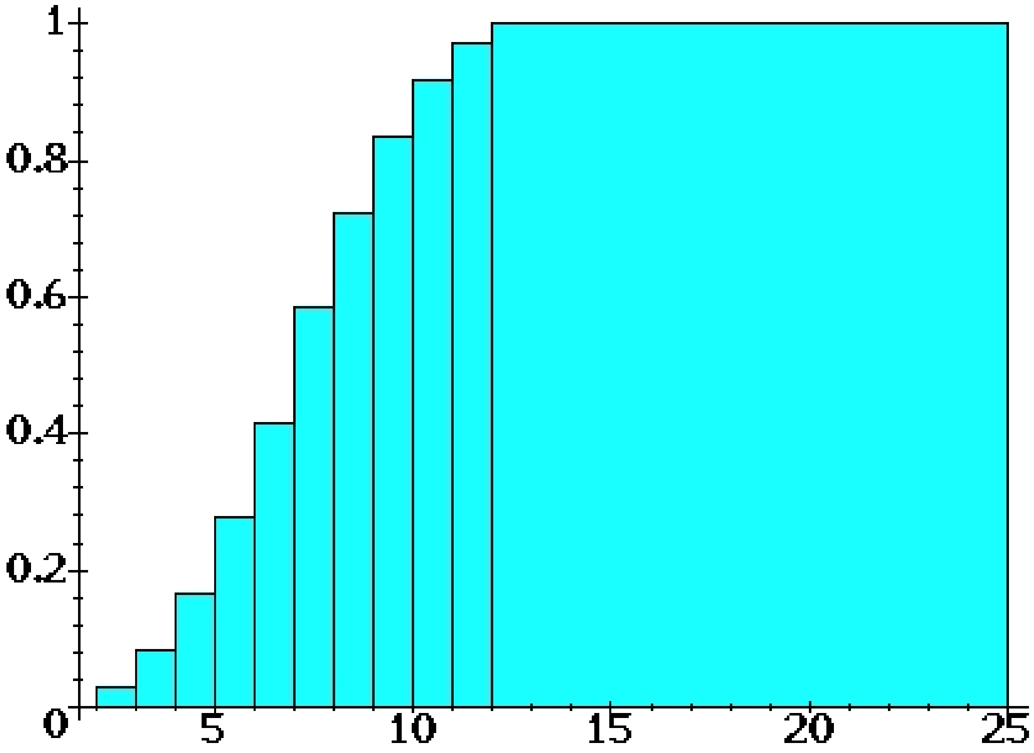
Les seules valeurs de X pour les quelles la probabilité est non nulle, sont celles ou la fonction de répartition change de valeur : 0, 1, 2, 3 et 3,5.

On a P(X=0)=1/2, P(X=1)=3/5-1/2=1/10, P(X=2)=4/5-3/5=1/5 P(X=3)=9/10-4/5=1/10 et P(3,5)=1-9/10=1/10

Exercice 3.3

Déterminer la fonction de répartition des variables aléatoires S =somme de deux dés, P = produit de deux dés.

Considérons que les deux dés sont distinguables, et qu'il y a 36 valeurs possibles pour le couple des résultats, toutes équiprobables.
La loi de probabilité pour S est donc
P(S=2)=P(S=12)=1/36
P(S=3)=P(S=11)=2/36
P(S=4)=P(S=10)=3/36
P(S=5)=P(S=9)=4/36
P(S=6)=P(S=8)=5/36
P(S=7)=6/36



La loi de probabilité de P est

P(P=1)= 1/36	P(P=8)=2/36	P(P=18)=2/36
P(P=2)=2/36	P(P=9)=1/36	P(P=20)=2/36
P(P=3)=2/36	P(P=10)=2/36	P(P=24)=2/36
P(P=4)=3/36	P(P=12)=4/36	P(P=25)=1/36
P(P=5)=2/36	P(P=15)=2/36	P(P=30)=2/36
P(P=6)=4/36	P(P=16)=1/36	P(P=36)=1/36

Exercice 3.4 *Un jeu utilise trois dés (ordinaires à 6 faces). Un joueur peut parier un franc sur un numéro quelconque entre 1 et 6. On lance les dés. Si le numéro du joueur n'apparaît sur aucun des dés, il perd sa mise. Sinon, si son numéro apparaît sur exactement k dés ($1 \leq k \leq 3$), il récupère sa mise et gagne k francs supplémentaires. Combien un joueur peut-il espérer gagner?*

L'espace des probabilités définit par $\Omega = \{(a,b,c), 1 \leq a,b,c \leq 6\}$ est muni de la probabilité uniforme. On définit la variable aléatoire X de Ω dans $\{-1,1,2,3\}$ =gain du joueur (si le numéro choisit par le joueur n'apparaît sur aucun des trois dés, il perd sa mise (gain de -1), sinon il récupère sa mise (gain égal au nombre k)).

La probabilité pour que le nombre choisi apparaisse sur exactement k dés ($1 \leq k \leq 3$) est donné par $\frac{C_3^k 5^{3-k}}{6^3}$.

On en déduit

Y	-1	1	2	3
P(Y)	125/216	75/216	15/216	1/216

et donc E(X)=-17/216. En moyenne le joueur perd 8 centimes...

Exercice 3.5 *On va vous poser deux questions Q_1 et Q_2. Si vous répondez juste à Q_i, vous gagnez V_i euros et le droit de répondre à Q_{3-i},*
si votre réponse est fausse, le jeu s'arrête.
Vous connaissez p_i la probabilité de répondre juste à Q_i.
Vous avez le droit de choisir la première question, commencez vous par Q_1 ou par Q_2 ?

Si l'on choisit de répondre à Q_i puis à Q_{3-i}, on gagne :

- V_1+V_2 avec probabilité $p_i p_j$
- V_i avec probabilité $p_i(1-p_j)$
- 0 avec probabilité $1-p_i$

L'espérance de gain est donc de $(V_1+V_2)\, p_i p_j + V_i\, p_i(1-p_j)$
Il faut donc maximiser le produit $V_i\, p_i(1-p_j)$