ESSI 1

2003-2004

Probabilités

Chapitre 2 : Probabilité conditionnelle et indépendance

Corrigé

Exercice 2.1 *: On jette deux dés, quelle est la probabilité pour que l'un au moins d'entre eux soit un six, sachant que les deux dés sont différents ?*

Soient US et DD les deux événements « l'un des dés est un six » « les deux dés sont différents ». On recherche $P(US|DD) = P(US \cap DD)/P(DD)$

Or la probabilité d'avoir deux dés différents est de 30/36=5/6 , celle d'avoir un six et deux dés différents est de 10/36 =5/18, la probabilité recherchée est donc de 10/30=1/3

Exercice 2.2 *: Montrer que si B est inclus dans A alors P(A|B) =1, que si A est inclus dans B, alors P(A|B)=P(A)/P(B) et si A et B sont disjoints, alors P(A|B)=0*

Par définition, $P(A|B)=P(A\cap B)/P(B)$.

Si B est inclus dans A, $A\cap B=B$, donc $P(A|B)=P(B)/P(B)=1$

Si A est inclus dans B, $A\cap B=A$, donc $P(A|B)=P(A)/P(B)$

Si A et B sont disjoints, $A\cap B=\varnothing$, donc $P(A|B)=0$

Exercice 2.3 *: Une urne contient 8 boules jaunes, 10 boules blanches et 5 boules rouges. On tire une boule au hasard quelle est la probabilité pour qu'elle soit rouge, sachant qu'elle n'est pas jaune.*

P(Rouge| PasJaune)=P(Rouge et PasJaune)/P(PasJaune)=P(Rouge)/P(PasJaune)=5/15=1/3

Exercice 2.4 *Pierre provient d'une famille de deux enfants, quelle est la probabilité pour qu'il ait une sœur ? Pierre est l'ainé d'une famille de deux enfants qu'elle est la probabilité pour qu'il ait une sœur.*

On considère équiprobables les 4 compositions de familles à 2 enfants, (f,f), (f,g) , (g ,f) ,(g ,g). Soient F et G les événements « la famille comporte au moins une fille » et « la famille comporte au moins un garçon ». Dans le premier cas, on cherche $P(F|G) = P(F\cap G)/P(G)=1/2 \,/\, 3/4 = 2/3$

Si Pierre est l'ainé, on cherche la probabilité pour que le deuxième enfant soit une fille sachant que le premier est un garçon, on obtient ½

Exercice 2.5 *On divise un jeu de 52 cartes en 4 piles de 13 cartes, quelle est la probabilité pour que chaque pile contienne un as*

Considérons les événements suivants :

E1, l'as de pique est dans une pile

E2, les as de pique et de trèfle sont dans deux piles différentes

E3, les as de pique, de trèfle et de cœur sont dans trois piles différentes

E4, chaque pile contient un as.

On a $E4 \subset E3 \subset E2 \subset E1$, et $E4 = E1 \cap E2 \cap E3 \cap E4$.

Donc $P(E4)=P(E1)P(E2|E1)P(E3|E1 \cap E2)P(E4|E1 \cap E2 \cap E3)$.

Clairement P(E1)=1.

P(E2|E1)=39/51 (à priori l'as de trèfle pourrait être une des 51 cartes qui n'est pas l'as de pique, mais l'as de trèfle doit etre une des 39 cartes qui n'est pas dans la même pile que l'as de pique)

$P(E3|E1 \cap E2)=26/50$ (il reste 26 places possible pour l'as de cœur)

$P(E4|E1 \cap E2 \cap E3)=13/49$

La probabilité pour que chaque pile contienne un as est donc 13.26.39/49.50.51 soit environ 0.105

Une autre manière d'arriver au même résultat :

E1, l'as de pique est seul dans sa pile

E2, l'as de trèfle est seul dans sa pile

E3, l'as de pique est seul dans sa pile

E4, l'as de carreau est seul dans sa pile

L'événement : « chaque pile contient un as « est l'intersection de ces 4 événements .

On peut donc calculer sa probabilité comme $P(E1)P(E2|E1)P(E3|E1 \cap E2)P(E4|E1 \cap E2 \cap E3)$.

$P(E1)=\frac{C_{48}^{12}}{C_{51}^{12}}$, en effet il y a 51 cartes différentes de l'as de pique, et 48 cartes qui ne sont pas des as. On doit compléter la pile qui contient l'as de pique avec 12 cartes.

$P(E2|E1)=\frac{C_{36}^{12}}{C_{38}^{12}}$, en effet on sait que dans une des piles il y a l'as de pique avec 12 cartes qui ne sont pas des as. Ces 13 cartes ne jouent plus, elles sont placées. Dans les trois autres piles, il y a 39 cartes dont trois as. L'as de trèfle est forcement dans une des trois autres piles, cette pile contient 12 autres cartes.

P(E3|E1$\cap$E2)=$\dfrac{C_{24}^{12}}{C_{25}^{12}}$, même raison.

Enfin P(E4|E1$\cap$E2$\cap$E3)=1

La probabilité demandée vaut donc $\dfrac{C_{48}^{12}}{C_{51}^{12}}\dfrac{C_{36}^{12}}{C_{38}^{12}}\dfrac{C_{24}^{12}}{C_{25}^{12}}$ =13.26.39/49.50.51

Exercice 2.6 *Dans un chapeau trois cartes, l'une a deux faces rouges, une autre deux faces noires et la dernière a une face rouge et une face noire. On tire une carte au hasard, sa face visible est roug , quelle est la probabilité pour que l'autre face soit noire.*

Soient RR, NN, NR,R, les événements « la carte tirée a deux faces rouges », « la carte tirée a deux faces noires », « la carte tirée a une face rouge et une noire », « la face visible de la carte tirée est rouge ». On cherche P(NR|R)=P(NR$\cap$R)/P(R)

Or P(NR$\cap$R)=P(R|NR).P(NR)=1/2 1/3=1/6

P(R)=P(R|NR)P(NR)+P(R|RR)P(RR)+P(R|NN).P(NN)=1/6+1/3+0=1/2

La probabilité cherchée est donc de 1/3 .

Plus rapidement : il y a en fait trois faces rouges possibles, parmi lesquelles une seule est associée à une face noire, d'où la probabilité de 1/3.

Exercice 2.7 *On lance un dé à six faces, , puis une pièce est lancée le nombre de fois indiqué par le dé. Trouver la probabilité pour que toutes les pièces tombent sur pile. Sachant que toutes les pièces sont des piles, trouver la probabilité pour que le résultat du dé ait été une valeur i donnée entre 1, et 6.*

Soient Fi les événements « le résultats du dé est i », et E l'événement « toutes les pièces sont des piles ».

D'après la formule des probabilités totales, P(E) = P(E|F1)P(F1)+ P(E|F2)P(F2)+ P(E|F3)P(F3)+ P(E|F4)P(F4)+ P(E|F5)P(F5)+ P(E|F6)P(F6)

Or P(Fi) =1/6 , et P(E|Fi)=1/2^i, donc P(E)=1/6 (1/2+1/4+1/8+1/16+1/32+1/64)=63/(6.64)

D'autre par P(Fi|E)=P(E|Fi).P(Fi)/P(E) donc,

P(E|F1)=64/2.63=32/63

P(E|F2)=64/4.63=16/63

P(E|F3)=64/8.63=8/63

P(E|F4)=64/16.63=4/68

P(E|F5)=64/32.63=2/63

P(E|F6)=64 /64.63=1/63

On vérifie que la somme de ces 6 probabilités est bien égale à 1.

Exercice 2.8 *Lors d'un QCM, un étudiant a le choix pour chaque question entre m réponses. Il connaît la réponse exacte avec une probabilité p, et dans ce cas choisit la bonne case, sinon il choisit aléatoirement une des m cases. Quelle est la probabilité pour qu'il connaisse la réponse, sachant qu'il a choisit la bonne case.*

Soit CR l'événement « l'étudiant connaît la réponse » , soit CC l'événement « l'étudiant coche la bonne case ». On recherche P(CR|CC).

Or P(CR|CC)=P(CC$\cap$ CR)/P(CC)

P(CC$\cap$ CR)=P(CC|CR).P(CR)=1.p=p

D'autre part, P(CC)= P(CC|CR).P(CR)+ P(CC|CR^c).P(CR^c)=p+(1/m)(1-p)=(mp-p+1)/m

Donc finalement P(CR|CC) =pm/(mp-p+1)

Exercice 2.9 *On suppose que A et B sont des événements indépendants d'une certaine expérience aléatoire. Montrer que chacune des paires d'événements suivantes est indépendante : (A^c, B) (A,B^c), (A^c, B^c)*

On sait que P(A$\cap$B)=P(A)P(B).

P($A^c\cap$B) = P(B)-P(A$\cap$B)=P(B)(1-P(A))=P(B)P(A^c). Donc A^c et B sont bien indépendants.

De même P($A\cap B^c$) = P(A)-P(A$\cap$B)=P(A)(1-P(B))=P(A)P(B^c). Donc B^c et A sont bien indépendants. On pouvait aussi dire que ce résultat est une conséquence du premier, les deux événements jouant le même rôle.

P($A^c\cap B^c$) = P(A^c)-P($A^c\cap$B)= P(A^c) -P(A^c)P(B)= P(A^c)(1-P(B))= P(A^c) P(B^c). La aussi ce résultat est en fait une conséquence des deux premiers, le second etant appliqué à A, B^c

Exercice 2.10 *Donner un exemple de trois événements, deux à deux indépendants, mais pas trois à trois indépendants*

Soit E = {1,2,3,4} muni de la probabilité uniforme. Soient A = {1,2}, B = {2,3}, C = {3,1}. Ces 3 événements sont 2 à 2 indépendants, or A∩B∩C est vide et donc a une probabilité nulle.

Exercice 2.11 *Un groupe d'élèves de l'ESSI contient 4 garçons et 6 filles de première année, il contient aussi 6 garçons de seconde année. Combien doit il comporter de filles de seconde année pour que le sexe et l'année soient des facteurs indépendants dans le choix d'un élève au hasard dans le groupe.*

Soit g1,g2,f1,f2 respectivement le nombre de garçons de première et deuxième année , le nombre de filles de première et deuxième année. Le nombre total d'élèves du groupe n=f1+f2+g1+g2

Soit G l'événement « l'élève choisi au hasard est un garçon », soit P l'événement « l'élève choisi au hasard est un élève de première année ». Ces deux événements sont indépendant si et seulement si la probabilité de l'événement GP « l'élève choisi au hasard est un garçon de première année » vérifie P(GP)=P(G)P(P). Or P(P)=(f1+g1)/n, P(G)=(g1+g2)/n et P(PG)=g1/n. On cherche donc l'entier f2, tel que 10.10/(16+f2)=4, donc f2=9