ESSI 1

2003-2004

Exercice 2.12

Un laboratoire d'analyse médicale assure avec une fiabilité de 95% la détection d'une maladie lorsqu'elle est effectivement présente. Le test indique aussi un résultat faussement positif pour 1% des personnes non atteintes.

En fait, 0,5% de la population est atteinte. Quelle est la probabilité pour qu'une personne soit effectivement malade lorsque le résultat du test est positif.

T l'évènement : « le résultat du test est positif »

M l'événement : « la personne est malade »

On demande de calculer P(M|T)

D'après l'énoncé P(T|M)=0,95, P(T|M^c)=0,01 et P(M)=0,005.

On a donc P(T)=P(T|M)P(M)+ P(T|M^c)P(M^c)=0,95.0,05+0,01.0,995 et

P(M|T)=P(T|M)P(M)/P(T)=(0,95.0,005)/(0,95.0,05+0,01.0,995)=95/294=0,323

Exercice 2.13

Une urne contient b boules blanches et r boules rouges. On effectue k tirages,k <r ,et on adopte la règle suivante: si on tire une boule blanche, on la remet, si on tire une boule rouge, on la remplace par c boules blanches.

Quelle est la probabilité de tirer k boules rouges?

$$P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2)...P(A_n|\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i)$$

Si les {A_i} sont des événements quelconques, on a:

Soit l'événement A_i= "on tire une boule rouge au i-ième tirage ».

$$P(A_i | \bigcap_{j=1}^{i-1} A_j)$$

est la probabilité pour que l'on obtienne une boule rouge au i-ième tirage sachant que les i1 premiers tirages ont tous donné des boules rouges.

Or après le i-ième tirage, si tous les tirages ont donnes une rouge, il y a dans l'urne r-i+b+ic boules dont r-i rouges et b+ic blanches. On a donc :

P(tirer k boules rouges)= $\prod_{i=0}^{k-1} \frac{r-i}{r-i+b+ic}$

Exercice 2.14

Transmission de messages. Considérons la transmission d'un message "Oui" ou "Non" dans une population. Chaque personne transmet le message qu'elle a reçu avec la probabilité p et le message contraire avec la probabilité q=1-p.

Soit X_n le message reçu par le nième individu I_n . On suppose que X_1 était le message "Oui". Calculer la probabilité que X_n soit le message "Oui".

Soit "Bon" l'événement la (n-1) i-ème personne a transmis le message qu'elle a reçu.

De nouveau d'après la formule des probabilités totales, on a:

P(X_n =oui)= P(X_n =oui|Bon)P(Bon) P(X_n =oui|pas Bon)P(pas BON)

P(X_{n-1}=oui) p + P(X_{n-1}=non)(1-p)

En posant p_n=(X_n =oui)

il vient donc p_n= p_{n-1}p p + (1-p $_{n-1}$)(1-p)

C'est une équation de récurrence linéaire non homogène d'ordre un. Les solutions générales de l'équation homogène associée sont de la forme $c(2p-1)^n$: L'équation non homogène admet une solution particulière constante, égale à un demi. Les solutions de l'équation non homogène sont donc de la forme $c(2p-1)^n+1/2$. En remarquant que $x_1=1$, on a $x_n=(1+(2p-1)^n)/2$