ESSI 1

2003-2004

Probabilités

Chapitre 1 : premières propriétés des probabilités

Corrigé

Exercice 1.1 : Quelles épreuves ?

- Quel est l'espace des épreuves dans chacune des expériences suivantes , est il fini , dénombrable, ni l'un ni l'autre ?:
  - Une élection doit permettre de choisir entre le candidat A et le candidat B
  - Un dé à 4 faces est lancé
  - On demande à un individu pris au hasard dans la rue, son mois et son jour de naissance
  - On choisit au hasard un élève dans cette salle
  - Une note sur 20 vous est donnée à un examen
  - Un dé est jeté jusqu'à ce qu'un 6 sorte, ce qui détermine la fin de l'expérience.
  - On choisit un point sur une droite
- Parmi ces expériences, quelles sont celles pour lesquelles il est raisonnable de penser que la probabilité est une loi uniforme ?

Espace des épreuves dans chacune des expériences suivantes :

- Une élection doit permettre de choisir entre le candidat A et le candidat B.

$\Omega=\{A,B\}$ est fini, la loi est une loi uniforme seulement si les deux candidats ont égalité des chances, ce n'est pas très raisonnable comme hypothèse.

- Un dé à 4 faces est lancé

$\Omega=\{1,2,3,4\}$ est fini . Ici une loi uniforme est raisonnable

- On demande à un individu pris au hasard dans la rue, son mois et son jour de naissance

Si on choisit $\Omega=\{\{\text{janvier},\ldots\text{décembre}\}\text{x}\{1..31\}\}$. La loi n'est pas uniforme la probabilité de naître un 31/Février est nulle.

Si on choisit $\Omega=\{\text{les 366 jours possibles}\}$. La loi est presque uniforme la probabilité de naître un 29 Février est toutefois très différente des autres.

Dans tous les cas Ω est fini

- On choisit au hasard un élève dans cette salle.

$\Omega=\{\text{élèves de la classe}\}$ est fini. La loi est uniforme, c'est exactement ce qu'on veut dire par au hasard

- Une note vous est donnée à un examen

Ω= [0..20] est fini . La loi n'est pas uniforme

- Un dé est jeté jusqu'à ce qu'un 6 sorte, ce qui détermine la fin de l'expérience.

$\Omega=\{m6/\ m\in \{1,2,3,4,5\}^*\}$. Ω est infini, dénombrable La probabilité n'est pas uniforme

- On choisit un point sur une droite

Ω={tous les points de la droite, }. Ω est infini, non dénombrable La probabilité est uniforme.

Exercice 1.2.

Soient E, F et G trois événements. Trouver des expressions pour les événements qui sont réalisés lorsque de E,F et G

- Seul E l'est : $E \cap F^c \cap G^c$
- E et G le sont, mais pas F : $E\cap F^c\cap G$
- Au moins deux d'entre eux le sont $(E^c\cap F\cap G)\cup (E\cap F^c\cap G) \cup (E\cap^c\cap G^c) \cup (E\cap F^c\cap G)$
- Les trois le sont $(E\cap F\cap G)$
- Aucun ne l'est $E^c\cap F^c\cap G^c$
- Au plus l'un des trois l'est $(E^c\cap F^c\cap G^c)\cup (E^c\cap F^c\cap G) \cup (E\cap F^c\cap G^c) \cup (E^c\cap F\cap G^c)$
- Exactement deux le sont $(E^c\cap F\cap G)\cup (E\cap F^c\cap G) \cup (E\cap F^c\cap G^c)$

Exercice 1.3. Cartes

- Quel est le nombre de manières différentes de choisir un sous-ensemble de 8 cartes dans un jeu de 32 ? C_{32}^8=32 ! / 8 ! 24 !
- On choisit 8 cartes, une par une, dans un jeu de 32 cartes et on les étale devant soi en ligne. Combien d'étalages possibles ? A_{32}^8=32 ! / 24 !
- On choisit 8 fois de suite une carte dans un jeu de 32 cartes, après chaque tirage on note le résultat, et on remet la carte dans le jeu. Combien de résultats possibles ? 32^8
- Dans lesquels de ces trois cas, les résultats sont-ils équiprobables ? tous
- Dans le cas de tirage avec remise, qu'elle est la probabilité de sortir 8 fois l'as de cœur ? $1/\ 32^8$ de sortir tous les cœurs ?$8\ !/32^8$

Exercice 1.4 : Poker

Au poker, on utilise un jeu de 52 cartes avec 4 couleurs de cartes (pique, trèfle, carreau, cœur). Une main comprend 5 cartes. Une main est une couleur si les 5 cartes sont de la même couleur.

- Quelle est la probabilité de recevoir une couleur?$4\ C_{13}^5/\ C_{52}^5$
- Quelle est la probabilité de recevoir un carré d'as?$48/\ C_{52}^5$

Exercice 1.5 : Pièces

- Ω={(P,P),(P,F),(F,F),(F,P)}
- P loi uniforme
- E=« la première pièce tombe sur pile »
- F=« la deuxième pièce tombe sur pile »

- Calculez P(E), P(F) et P(E$\cup$F) : ½, ½, ¾

Exercice 1.6 : Dates de naissances

- N personnes sont dans une salle. Quelle est la probabilité pour qu'au moins deux d'entre elles aient le même numéro de carte bleue (pour simplifier, on supposera ces numéros sont équiprobables, ont tous 4 chiffres et jamais 3 fois le même). A partir de combien de personnes cette probabilité est-elle supérieure à ½ ?

- N personnes, dont vous, sont dans une salle. Quelle est la probabilité pour qu'une autre personne au moins ait le même numéro de carte que vous. A partir de combien de personnes cette probabilité est-elle supérieure à ½ ?

Le nombre de codes est 10000 -370=9630 (il y a 370 codes interdits, ceux de la forme aaaa, aaab, aaba,abaa et baaa)

Si N est >9630 , il y a forcément deux personnes ayant le même code , et P_n =1.

Sinon, cette probabilité est égale à 1-P(aucune des N personnes n'ait le même code).

Notons P_n la probabilité pour que n personnes prises au hasard aient des codes différents ; Sous l'hypothèse d'une équirépartition descodes

P_1=1

P_2=9629/9630 car la deuxième personne doit avoir un code différent de celle de la première

P_3=P_2.0628/9630

P_n= P_{n-1}.(9630-(n-1))/9630

Faisons imprimer à Maple, les couples (k, probabilité pour que dans un groupe de k personnes au moins deux ait la même code :

for i from 1 to 120 do print (i, evalf(1-product((9630-k)/9630,k=1..i)));od;

1, .0001038421599

2, .0003115049134

3, .0006229343511

4, .001038044243

5, .001556716079

6, .002178799122

……..

22, .02594991189

23, .02827630358

24, .03069804488

25, .03321440510

……

69, .2222765613

70, .2279297951

71, .2336221091

72, .2393520373

73, .2451181122

74, .2509188661

75, .2567528313

………

102, .4215646959

103, .4277514910

104, .4339315372

105, .4401036232

106, .4462665532

107, .4524191471

108, .4585602407

109, .4646886866

110, .4708033537

111, .4769031282

112, .4829869132

113, .4890536296

114, .4951022159

115, .5011316287

……

120, .5309558555

cette probabilité dépasse 0.5 à partir de114 personnes.

- Pour la seconde question, la probabilité pour que toutes les autres personnes aient un code différent du votre est :

$(364/365)^{N-1}$

Exercice 1.7 : Des chaussettes

Un tiroir contient n chaussettes dont 3 rouges. Quelle doit être la valeur de n, pour que si l'on choisit 2 chaussettes aléatoirement, la probabilité qu'elles soient toutes les deux rouges soit le plus proche possible de ½

La probabilité pour tirer deux chaussettes rouges est $C_3^2 / C_n^2 = 6/n(n-1)$. Si n=4, cette probabilité vaut exactement 1/2

Exercice 1.8 : Des couples

10 couples sont assis au hasard autour d'une table. Calculer la probabilité pour qu'aucune femme ne soit assise à coté de son mari.

Remarquons tout d'abord qu'il y a 19 ! manière de placer des personnes autour d'une table ronde, si l'on veut travailler aux permutations près .

Soit Ei l'événement « le couple i est réuni ». La probabilité cherchée est 1-p(U Ei).

Or $P(UEi) = \Sigma\, p(Ei) - \Sigma p(Ei \cap Ej) + \Sigma p(Ei \cap Ej \cap Ek) + \ldots - p(\cap Ei)$

Calculons $p(Ei1 \cap Ei2 \ldots \cap Ein)$, c'est la probabilité pour que n couples donnés soient assis l'un à coté de l'autre. On doit donc placer autour de la table n couples et 20-n autres personnes, il y a

$2^n . (19-n)\, !/ 19\, !$ de le faire

Donc la probabilité pour qu'il y ait au moins un couple réuni est

$C_{10}^1\, 2^1\, (18\, !)/19\, ! - C_{10}^2\, 2^2\, (17\, !)/19\, ! + C_{10}^3\, 23^1\, (16\, !)/19\, ! + \ldots - C_{10}^{10}\, 2^{10}\, (9\, !)/19\, ! \cong 0.6606$

La probabilité cherchée est donc de 0,3395