

2005–2006

Contrôle de Mathématiques Discrètes
du 27 Septembre 2005

Groupe: _____

1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2} < 2$$

This image shows a blank sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

2 Plus petit élément

Démontrer que toute partie finie non vide d'un ensemble totalement ordonné contient un plus petit élément.

3 Division

On considère sur $\mathbb{N}$, la relation *divise* notée $|$ définie par $a|b$ si il existe un entier k tel que $b = ka$.

Montrer que $|$ est une relation d'ordre.

Est-ce un ordre total?

Donner s'ils existent le plus petit et le plus grand élément de $\mathbb{N}$ pour $|$.

This image shows a blank sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

4 Ordre?

Donner la définition d'une relation d'ordre et donner un exemple de relation d'ordre (différent de ceux vus en cours/TD).

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

5 Ordre strict?

Sur l'ensemble des cyclistes professionnels, on considère la relation *est meilleur que* définie par x est meilleur que y si x est arrivé devant y à toutes les courses de l'UCI pro-tour où l'un et l'autre ont couru, autrement dit dès que x et y courent ensemble x arrive devant y .

Il n'y a aucun ex eaqno dans le système de classement UCI. Est-ce une relation d'ordre strict?

Même question si l'on suppose en outre que tous les coureurs participent à toutes les courses.

This image shows a full page of blank, lined paper. It features approximately 20 evenly spaced horizontal grey lines across its entire width, providing a template for handwriting practice or general note-taking. The margins are consistent on all sides.

6 Ordre d'ainesse

On considère E l'ensemble des SI1 et des MAM1. Soient a et b deux éléments de E , on dit que aRb si et seulement si a n'est pas né plus tard que b . La relation R est elle un ordre? Pour chacune des propriétés d'une relation d'ordre dire si R vérifie la propriété. Si R est une relation d'ordre est ce un ordre total ou partiel?

This image shows a single sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

7 Calculateur prodige (d'après un problème du journal *Le Monde*)

Un magicien demande à un spectateur de choisir 2 nombres, et de les écrire sur une feuille l'un en dessous de l'autre, puis d'en faire la somme et de l'écrire en dessous du dernier nombre écrit, puis de faire la somme du nombre obtenu et du nombre précédent et de l'écrire en dessous du dernier nombre écrit, puis de recommencer autant de fois qu'il veut. Le magicien lui demande ensuite le **deuxième** nombre choisi ainsi que les 2 derniers nombres qu'il a écrit, et après invocation d'une formule magique (!), lui donne la somme de tous les nombres que le spectateur a écrit. Quelle est la formule magique du magicien?

En notant f_n le $n^{ième}$ nombre écrit par le spectateur, on a pour entier n , la relation $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ (suites dites de Fibonacci). Il s'agit donc de trouver une formule pour calculer la somme des termes d'une suite de Fibonacci, $S_n = \sum_{i=1}^n f_i$. En sommant les égalités $f_{i+2} = f_{i+1} + f_i$, pour tous les i variant de 1 à n , on trouve après simplifications que $f_{n+2} = f_2 + S_n$, soit $S_n = f_{n+2} - f_2$. Cette égalité peut être trouvée ou devinée par tout autre moyen (par exemple, en regardant ce qui se passe pour quelques termes), puis démontrée facilement par récurrence.

Si on revient au magicien, il cherche à calculer S_n , pour cela il demande f_n et f_{n-1} qui lui permettent de calculer $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n = 2f_n + f_{n-1}$, auquel il soustrait le deuxième nombre écrit f_2 (et non le premier comme indiqué par erreur dans l'énoncé original).