Nom :

Prénom :

Groupe:

Université de Nice-Sophia Antipolis
Polytech' Nice Sophia

2005–2006

Contrôle de Mathématiques Discrètes
du 19 Octobre 2005

Durée : 60 minutes

1	
2	
3	
4	
5	
6	

Toutes vos réponses doivent être justifiées par une démonstration ou un contre-exemple. Si vous pensez que le texte d'une question est ambigu (voire erroné) faites une hypothèse raisonnable et écrivez la sur votre copie.

Aucun document autorisé

1 Récurrence simple [2 points]

Montrer par récurrence que pour tout n entier la somme des n premiers entiers multiples de cinq et impairs est egal à $5n^2$

2 Des petits, des grands? [3 points]

On considère l'ensemble des parties de N ordonné par l'inclusion. Soit $A = \{\{1{,}2\},\{1{,}5\},\{1{,}4\}\}$ et soit $B = \{\{1{,}2\},\{1{,}2{,}3\},\{1\},\{1{,}4\},\{1{,}4{,}3\}\}$

- A et B ont ils un ou des minorants ? si oui lesquels, si non pourquoi?
- A et B ont ils un ou des éléments minimaux ? si oui lesquels, si non pourquoi?
- A et B ont ils un ou des plus petits éléments ? si oui lesquels, si non pourquoi?
- A et B ont ils un ou des majorants ? si oui lesquels, si non pourquoi?
- A et B ont ils un ou des éléments maximaux ? si oui lesquels, si non pourquoi?
- A et B ont ils un ou des plus grands éléments ? si oui lesquels, si non pourquoi?

3 Ordre bien fondé [5 points]

Montrer que si un ensemble est ordonné par une relation d'ordre total bien fondé (c'est à dire un bon ordre), toute partie non vide admet un plus petit élément.
Est-ce que la propriété est toujours vraie même si l'ordre n'est pas total (si oui prouver, si non donner un contre-exemple) ?
Est-ce que la propriété est toujours vraie même si l'ordre n'est pas bien fondé (si oui prouver, si non donner un contre-exemple) ?

4 Définition inductive [3 points]

On considère l'ensemble E défini de manière inductive par

- Base : $\epsilon \in E$
- Règles :
  - Si $m \in E$ alors $10m0 \in E$
  - Si $m \in E$ alors $01m0 \in E$
  - Si $m \in E$ alors $00m1 \in E$

Soit M le sous-ensemble de $\{0,1\}^*$ formé des mots ayant deux fois plus de 0 que de 1.

1. A-t-on M inclus dans E?
2. A-t-on E inclus dans M?
3. Le schéma définissant E est-il libre?

5 Ordre inductif [4 points]

Donner et prouvez un schéma inductif pour $M = \{(m,n,p) \in N^3, m \leq n \leq p\}$

6 Maximal [3 points]

Montrer que pour un ordre quelconque (total ou partiel), toute partie finie non vide admet au moins un élément maximal.