Nom :

Prénom :

Groupe:

Université de Nice-Sophia Antipolis
École Supérieure en Sciences Informatiques

2004–2005

Controle de Mathématiques Discrètes
du 15 Novembre 2004

Aucun document autorisé

Note :

Durée : 2 heures

| | |
|---|---|
| 1 | |
| 2 | |
| 3 | |
| 4 | |
| 5 | |
| 6 | |
| 7 | |

Toutes vos réponses doivent être justifiées.

## 1

Soit (E,$\leq$) un ensemble ordonné. Soit $R$ la relation sur $\mathcal{P}(E) \setminus \{\varnothing\}$ définie par : $ARB \Leftrightarrow \exists a \in A, \exists b \in B, a \leq b$. La relation $R$ est-elle reflexive, symmètrique, antisymétrique, transitive? Est-une relation d'ordre? Si oui, est ce un ordre total ou partiel ?

## 2

Soit (E,$\leq$) un ensemble muni d'une relation d'ordre total. Soit $R$ la relation sur $E \times E$ définie par $(x_1,y_1)R(x_2,y_2)$ si et seulement si $x_1 < x_2$ ou $x_1 = x_2$ et $y_2 \leq y_1$. La relation $R$ est-elle reflexive, symmètrique, antisymétrique, transitive? Est-une relation d'ordre? Si oui, est ce un ordre total ou partiel ?

## 3

Soit $A = \{a,b\}$. Soit $Egalab$, le sous ensemble de $A^*$ formé des mots ayant autant de a que de b.

On considère l'ensemble E défini de manière inductive par

- Base toute l$\epsilon$ appartient à $E$
- Règles
  - si $m$ appartient à $E$ alors $amb$ appartient à $E$
  - si $m$ appartient à $E$ alors $bma$ appartient à $E$
  - si $m$ et $m'$ appartienent à $E$ alors $mm'$ appartient à $E$

1. Montrez que $E$ egal $Egalab$
2. Le schéma définissant $E$ est il libre?

## 4

On défini inductivement la fonction f de $\{0,1\}^+$ dans $\{0,1\}^+$ par f(0)=01 et g(1)=10

1. Montrer par induction structurelle que pour tout mot m de $\{0,1\}^+$ f(m) ne contient pas trois lettres consécutives identiques
2. Montrer que pour tout mot m de $\{0,1\}^+$, tout facteur de longueur au moins 5 de f(f(m)) contient deux zéros ou deux uns consécutifs.

## 5

Soit $A$ un alphabet, définir inductivement la fonction

$toutDoubler : A^* \to A^*$

telle que $toutDoubler(m)$ est le mot obtenu à partir de $m$ en remplaçant chaque lettre, par la lettre répétée deux fois. Par exemple, $toutDoubler(abc) = aabbcc$

Donner aussi un code récursif.

## 6

Donner (et prouver) une définition inductive libre de $N \times N \times N$

## 7 *Le pirate égyptologue. *(Source Le Monde, 28/9/1999)

Le capitaine d'un vaisseau pirate, qui s'est entiché de la civilisation égyptienne, a découvert que chez les anciens Egyptiens, on n'utilisait que des fractions dont le numérateur valait 1. Depuis, il exige que le partage du butin après un pillage attribue toujours aux membres de l'équipage une fraction de butin différente et de numérateur 1. Ainsi, lui-même s'attribue la part la plus importante, son second une part inférieure, et ainsi de suite... Si la répartition s'avère impossible selon ce principe, le butin est restitué aux malheureuses victimes. Comment s'opère le partage si les pirates sont trois ? S'ils sont quatre ? S'ils sont cinq ? Question subsidiaire : Le partage du butin selon cette règle est-il possible quel que soit le nombre de pirates ?