

Nom : _____

Prénom : _____

Groupe: _____

Durée : 2 heures

1	
2	
3	
4	
5	

Tous documents autorisés. Toutes vos réponses doivent être prouvées. Si vous pensez que le texte d'une question est ambigu, faites une hypothèse raisonnable et écrivez la sur votre copie.

1

On considère l'ensemble M des mots sur l'alphabet $\{a,b,c\}$ tels que les suites (maximales) de c consécutifs soient toujours de longueur paire. Ainsi, le mot $abccccbaaa$ est un mot de M , mais le mot $aabbccccba$ n'est pas un mot de M . On considère l'ensemble E défini inductivement par :

- $\epsilon \in E$
- Si $m \in E$, alors $am \in E$
- Si $m \in E$, alors $bm \in E$
- Si $m \in E$, alors $ccm \in E$

1. A-t-on M inclus dans E ?

2. A-t-on E inclus dans M ?

3. Le schéma définissant E est-il libre?

4. Trouvez et résoudre une relation de récurrence permettant de compter le nombres de mots de longueur n appartenant à E

2

On considère une variante des tours de Hanoï avec trois piquets A,B,C et n disques.

- les n disques sont de tailles différentes
- initialement les n disques sont rangés sur un des piquets X, du plus grand en bas, au plus petit en haut.
- on désire amener les n disques dans le même ordre sur un autre piquet Y.
- on ne peut déplacer qu'un seul disque à la fois;
- on ne peut pas poser un disque sur un disque de taille inférieure;
- tous les mouvements de disques doivent se faire via le piquet central (un déplacement direct dentre les deux piquets no centraux est interdit)

On rappelle que si ni X ni Y ne sont des piquets centraux, le nombre minimum de déplacements pour transporter n disques entre X et Y est de $3^n - 1$.

On suppose que $\text{Move_non_central_to_central}(n,X)$ déplace de manière optimale une tour de hauteur n d'un piquet non central X vers le piquet central? et que $\text{Move_non_central_to_central}(n,X)$ déplace de manière optimale une tour de hauteur n du piquet central vers un piquet non central X.

1. Déterminer, prouver et résoudre les équations de récurrence permettant de calculer la com-

This image shows a blank sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

- ```

Move_non_central_to_non_central (n, initial, final){
 if (n>0){ Move_non_central_to_central(n-1, initial);
 Move_central_to_non_central(n-1,final);
 Move_disque(initial, central);
 Move_non_central_to_central(n-1, final);
 Move_central_to_non_central(n-1,initial);
 Move_disque(central, final);
 Move_non_central_to_central(n-1, initial);
 Move_central_to_non_central(n-1,final)
 }
}

```

---

---

---

---

## 3

On suppose connue la méthode `Move_Hanoi(n, initial, final, intermediaire)` qui déplace de manière optimale (c'est à dire avec  $2^n - 1$  mouvements de disques) une tour de Hanoi de hauteur  $n$ , d'un piquet initial vers un piquet final en utilisant un seul piquet intermédiaire avec comme contraintes :

- les  $n$  disques sont de tailles différentes.
- initialement les  $n$  disques sont rangés sur un piquet initial, du plus grand en bas, au plus petit en haut.
- on désire amener les  $n$  disques dans le même ordre sur un piquet final.
- on ne peut déplacer qu'un seul disque à la fois.
- on ne peut pas poser un disque sur un disque de taille inférieure.

On suppose que l'on dispose d'un quatrième piquet. Pour chacune des stratégies suivantes, évaluer la complexité en nombre de déplacements de disques, et déterminer la meilleure de ces stratégies.

- Stratégie 1 : Déplacer les  $n-2$  plus petits disques vers l'un des piquets intermédiaires, puis déplacer les 2 grands disques restant du piquet initial vers le piquet final (en utilisant le piquet intermédiaire resté libre) , enfin déplacer les  $n-2$  plus petits disques vers le piquet final.

This image shows a blank sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

- **Stratégie 2 :**Déplacer  $n-3$  plus petits disques vers l'un des piquets intermediaires, puis déplacer les 3 grands disques vers le piquet final (en utilisant le piquet intermediaire resté libre) , enfin déplacer les  $n-3$  disques vers le piquet final.

[illegible]

- Stratégie 3: Déplacer  $n/2$  disques vers l'un des piquets intermédiaires, puis déplacer les  $n/2$  grands disques vers le piquet final (en utilisant le piquet intermédiaire resté libre), enfin déplacer les  $n/2$  petits disques vers le piquet final.

[illegible]

Question facultative: avez vous une meilleure stratégie?

---



---

---

---

---

---

---

3. Fusion:  $LC_E \times LC_E \rightarrow LC_E$

Cette fonction fusionne deux listes triées en une seule.

---

---

---

---

---

---

4. Extraire:  $LSC_E \times LSC_E \rightarrow LSC_E$

Cette fonction extrait de la première liste les éléments qui sont à la fois dans la première et dans la seconde liste.

---

---

---

---

---

---

## 5

Donnez l'ordre de grandeur des solutions des équations de récurrences suivantes :

$$- u_n = 6u_{n-1} - 8u_{n-2} + 3^n$$

[illegible]

$$-v_n = 6v_{n-1} - 8v_{n-2} + 4^n$$

$$- w_n = 6w_{n-1} - 8w_{n-2} + 2^n$$