Université de Nice-Sophia Antipolis
Polytech' Nice Sophia

2005–2006

Contrôle de Mathématiques Discrètes
du 12 Octobre 2005

Nom :______________________________

Prénom :______________________________

Groupe:______________________________

Durée : 1 heure

1	
2	
3	
4	
5	
6	

Toutes vos réponses doivent être justifiées par une démonstration ou un contre-exemple.
Aucun document autorisé

1 Récurrence simple

Montrer par récurrence que pour tout n entier strictement positif la somme des n premiers entiers multiples de trois et impairs est egal à $3n^2$

- Base n=1 , le premier entier impair multiple de 3 est 3, et on a bien $3 = 3.1^2$
- On suppose que $\sum_0^{n-1}(6k+3) = 3n^2$.
- On a alors $\sum_0^{n}(6k+3) = 3n^2 + 6n + 3 = 3(n+1)^2$.

2 Des petits, des grands?

On considère l'ensemble des parties de N ordonné par l'inclusion. Soit $A = \{\{a,b\},\{a,b,d\},\{a,d\}\}$ et soit $B = \{\{a,b\},\{a,b,c\},\{a\}\}$

- A et B ont ils un ou des minorants ? si oui lesquels, si non pourquoi?
- A et B ont ils un ou des plus petits éléments ? si oui lesquels, si non pourquoi?
- A et B ont ils un ou des plus éléments minimaux ? si oui lesquels, si non pourquoi?
- A et B ont ils un ou des majorants ? si oui lesquels, si non pourquoi?
- A et B ont ils un ou des plus grands éléments ? si oui lesquels, si non pourquoi?
- A et B ont ils un ou des plus éléments maximaux ? si oui lesquels, si non pourquoi?

- L'ensemble des minorants de $A =\{\emptyset,\{a\}\}$
- L'ensemble des minorants de $B =\{\emptyset,\{a\}\}$
- A n' a pas de plus petit élément puisqu'aucun de ses minorants ne lui appartient, tandis que B a $\{a\}$ comme plus petit élément.
- L'ensemble des éléments minimaux de $A =\{\{a,b\},\{a,d\}\}$
- L'ensemble des éléments minimaux de $B =\{\{a\}\}$
- L'ensemble des majorants de $A =\{E \subset N/\{a,b,d\} \subset E\}$
- L'ensemble des majorants de $B =\{E \subset N/\{a,b,c\} \subset E\}$
- Le plus grand élément de A est $\{a,b,d\}$, tandis que le plus grand élément de B est $\{a,b,c\}$
- $\{a,b,d\}$ est l'unique élément maximal de A et $\{a,b,c\}$ est l'unique élément maximal de B.

3 Ordre bien fondé

Une relation d'ordre est telle que pour tout élément x, il existe un nombre fini d'éléments inférieurs à x, cette relation est elle bien fondée? La réciproque est elle vraie?

Oui si l'on considére une suite strictement décroissante, son nombre de termes est borné par le nombre d'éléments (fini) qui sont inférieurs à son premier terme La réciproque est fausse, on en a vu des exemples en cours, par exemple l'ordre lexicographique sur NxN est bien fondé, mais tous les couples de la forme (1,n) sont plus petits que 2,1).

4 Définition inductive

On considère l'ensemble E défini de manière inductive par

- Base : $\epsilon \in E$
- Règles :
  - Si $m \in E$ alors $10m \in E$
  - Si $m \in E$ alors $01m \in E$
  - Si $m \in E$ alors $m10 \in E$
  - Si $m \in E$ alors $m01 \in E$

Soit M le sous-ensemble de $\{0,1\}^*$ formé des mots ayant autant de 0 que de 1.

1. A-t-on M inclus dans E?
2. A-t-on E inclus dans M?
3. Montrer que le schéma définissant E n'est pas libre
4. Modifier le schéma pour le rendre libre (sans modifier l'ensemble E obtenu, bien sûr)
5. Donner (sans preuve) un schéma inductif pour M

1. M n'est pas inclus dans E, car 1100 est dans M mais pas dans E
2. E est inclus dans M. Il suffit d'utiliser l'induction structurelle et de montrer
   - $\epsilon \in M$
   - Si $m \in M$ alors $10m \in M$
   - Si $m \in M$ alors $01m \in M$
   - Si $m \in M$ alors $m10 \in M$
   - Si $m \in M$ alors $m01 \in M$
3. Le schéma définissant E n'est pas libre, car le mot 1010 peut être construit par la règle 1 ou la règle 3.
4. Si l'on conserve uniquement les deux premieres règles on obtient un schéma libre pour le même ensemble:

   Soit F défini par
   - $\epsilon \in F$
   - Si $m \in F$ alors $10m \in F$
   - Si $m \in F$ alors $01m \in F$

   Le schéma définissant F est libre car
   - ϵ ne peut être produit par aucune des deux règles
   - $\forall m,m' \in F$, $10m \neq 01m'$
   - $\forall m,m' \in F$, $10m = 10m' \Rightarrow m = m'$
   - $\forall m,m' \in F$, $01m = 01m' \Rightarrow m = m'$

   Clairement $F \subset E$.

   Montrons $E \subset F$ par induction structurelle sur E
   - ϵ appartient à F
   - Si $m \in F$, alors $10m \in F$: évident

- Si $m \in F$, alors $01m \in F$: évident
- P(m) : Si $m \in F$, alors $m10 \in F$: pas évident !
  mais on va le montrer par induction structurelle sur F
  - Pour $m = \epsilon$ on a bien $10 \in F$, donc $P(\epsilon)$ est vraie
  - Supposons $P(m)$ et montrons $P(10m)$. Soit $10m$ dans F. Puisque le schéma définissant F est libre, $10m$ a été construit à partir de m et de la règle 1 et donc m est dans F. Mais alors puisque P(m) est vrai, $m10 \in F$. Par définition de F, on sait que $10m10$ est alors dans F. On a donc bien $P(10m)$ vrai
  - Supposons $P(m)$ et montrons $P(01m)$.
    Soit $01m$ dans F. Puisque le schéma définissant F est libre, $01m$ a été construit à partir de m et de la règle 2 et donc m est dans F. Mais alors puisque P(m) est vrai, $m10 \in F$. Par définition de F, on sait que $01m10$ est alors dans F. On a donc bien $P(01m)$ vrai
- Si $m \in F$, alors $01m \in F$: se montre exactement comme l'implication précédente

On a donc bien $E = F$, et l'on a donc trouvé un schéma libre définissant E

5. Un schéma possible pour M
   - ϵ appartient à M
   - $m,m' \in M \rightarrow Om1m' \in M$
   - $m,m' \in M \rightarrow 1m0m' \in M$

5 Plus petit que

Donner et prouvez un schéma inductif pour $P = \{(m,n) \in N^2, m \leq n\}$
- Base $\{0,0\} \in S$
- $\{(p,q) \in S \Rightarrow (p+1,q+1) \in S$
- $\{(p,q) \in S \Rightarrow (p,q+1) \in S$

Montrons $P = S$
- $S \subset P$ se montre facilement par induction structurelle sur S, il suffit de vérifier que
  - Base $0 \leq 0$
  - $p \leq q \Rightarrow p+1 \leq q+1$
  - $p \leq q \Rightarrow p \leq q+1$
- $P \subset S$ On va montrer par récurrence sur k, la propriété
  $P(k) = \forall (m,n) \in N, m+n \leq k, m \leq n$, on a $(m,n) \in S$
  - Base k=0, P(0) est vraie car $(0,0) \in S$
  - On suppose P(k) vraie.
    Soit un couple $(m,n) \in N, m+n \leq k+1, m \leq n$.
    Le seul cas à considérer est le cas où $m+n = k+1$.
    - Si n=m , alors le couple $(m-1,n-1)$ est un couple d'entiers (on ne peut pas avoir $m = n = 0$ et $m+n = k+1$) qui vérifie $m+n-2 < k$ et donc par hypothèse de récurrence c'est un couple de S, par définition de S, le couple (m,n) est lui aussi dans S .
    - Si $m < n$, alors $m \leq n-1$, $(m,n-1)$ est un couple d'entiers (n ne peut pas etre nul puisque $m < n$) et $m+n-1 \leq k$. Donc par hypothèse de récurrence c'est un couple de S, par définition de S, le couple (m,n) est lui aussi dans S .

Bien sur d'autres schémas sont possibles.

6 Maximal unique

Montrer que pour un ordre quelconque (total ou partiel), toute partie finie admettant un unique élément maximal, admet un plus grand élément.

Démontrons par récurrence sur k la propriété $P(k)$: toute partie finie de cardinal k admettant un unique élément maximal, admet un plus grand élément

- $n = 1$, l'unique élément est à la fois maximal et plus grand élément de l'ensemble
- Supposons $P(n)$ vrai, pour $n \geq 1$. Soit A une partie de cardinal $n+1$ admettant $uniqmaximalA$ comme unique élément maximal. Soit x_0 un élément de A, différent de $uniqmaximalA$.
  Considerons $A' = A - \{x_0\}$.
  $uniqmaximalA$ est maximal dans A'.
  Supposons que A' admette un autre élément maximal, $autremaxA'$.
  Puisque $autremaxA'$ n'est pas maximal dans A, c'est que $autremaxA' < x_0$.
  D'autre part, aucun élément de A' n'est plus grand que $autremaxA'$, donc aucun élément de A n'est plus grand que x_0, et donc x_0 est aussi maximal dans A, contradiction.
  A' a donc un unique élément maximal, et par hypothèse de récurrence, A' admet $uniqmaxA$ comme plus grand élément.
  Comme x_0 n'est pas maximal dans A, il existe M' dans A et donc dans A', tel que $x_0 < M'$, comme $uniqumaxA$ est le plus grand élément de A', on a $M' < uniqmaxA$, et donc $x_0 < uniqmaxA$, et donc $uniqmaxA$ est le plus grand élément de A.

Remarque : la démonstration devient triviale, si l'on suppose que l'ordre est total.