Université de Nice-Sophia Antipolis
École Supérieure en Sciences Informatiques

2003–2004

Examen Mathématiques Discrètes
du 23 Janvier 2004

Nom :_____

Prénom :_____

Groupe:_____

Tous documents autoriss

Note :

Durée : 2 heures

1	
2	
3	
4	
5	

Il vous est demandé de répondre sur la copie avec clarté, concision et rigueur. Certaines réponses peuvent être beaucoup plus courtes que le nombre de lignes pourrait le laisser supposer. Le barême est donné à titre indicatif. Toutes vos réponses doivent être justifiées par une preuve.

1 Graphes [4 points]

Soit p un entier strictement positif. Soient d_1,d_2,...d_p p entiers supérieurs ou égaux à trois. On note $GT(d_1,d_2,...d_p)$ le graphe dont les sommets sont des p-uplets $(x_1,...,x_i,...x_p)$ où pour tout i entre 1 et p, x_i est un entier compris entre 0 et $d_i - 1$. Il y a une arête entre $(x_1,...x_i,...x_p)$ et $(y_1,...,y_i,...y_p)$ si et seulement si il existe un entier j compris entre 1 et p tel que pour tout i différent de j, $x_i = y_i$ et d'autre part on a soit $x_j = y_j + 1$ modulo d_i ,soit $y_j = x_j + 1$ modulo d_i

1. Si p=1 , qu'est le graphe $GT(d_1)$?

2. Combien $GT(d_1,d_2,...d_p)$ a t-il de sommets, d'arêtes. Quel est le degré du sommet $(x_1,...x_i,...x_p)$?

3. Quel est le diamètre du graphe, c'est à dire la distance maximum entre deux sommets?

4. Sous quelles conditions sur $d_1,...d_i,....,d_p$, le graphe est-il biparti?

2 Résolution de récurrence [4 points]

1. Donner l'ordre de grandeur des solutions de l'équation $u_n = 3u_{n-1} - 2u_{n-2} + 2^n + 3^n$

2. Donner l'ordre de grandeur des solutions de l'équation $u_n = 4u_{n-1} - 3u_{n-2} + 2^n + 3^n$

3 Définition inductive [4 points]

On considére l'ensemble E défini inductivement par:

- Base : (0,0) appartient à E
- R1 : Si (n,0) appartient à E, alors (n+1,0) appartient à E
- R2 : Si (n,m) (différent de (0,0)) appartient à E, alors (n,n+m) appartient à E

1. Donner et prouver une définition non inductive de E

2. Le schéma définissant E est-il libre ?

3. Donner une définition inductive de la fonction f de E dans N, telle que f(n,m)=m/n.

4 Paire de points les plus proches [4 points]

4.1 Sur une droite

On considère n points x_1,x_2,....x_n sur une droite, triés par abcisse croissante, on désire trouver la distance minimum entre deux points.

1. Donner un algorithme dont la complexité est linéaire, qui permette de calculer cette plus petite distance.

4.2 Dans le plan

On considère n points du plan x_1,x_2,....x_n , triés par ordre d'abcisse croissante, et l'on désire trouver la distance minimum entre deux points.

1. Dessiner un exemple, où la distance minimum n'est pas atteinte par un couple (x_i,x_{i+1}).
2. Quelle est la complexité d'un algorithme qui calcule toutes les distances, puis détermine la distance minimum?

3. On propose un algorithme recursif.
   - On recherche (recursivement)la distance minimum entre deux points faisant partie des n/2 premiers points (triés), soit d_1 cette distance.
   - 0n recherche (recursivement) la distance minimum entre deux points faisant partie des n/2 derniers points (triés), soit d_2 cette distance.
   - 0n cherche la distance minimum parmi les paires constituées d'un point dans chacun des deux paquets, soit d_3 cette distance.
   - On calcule la distance minimale, en fonction de d_1,d_2 et d_3.

   En admettant que la recherche d'une paire la plus proche parmi les paires constituées d'un point dans chacun des deux paquets s'effectue en temps Θ(n), quelle est la complexité de cet algorithme?

5 Dessin récursif [4 points]

Voici les 3 premiers exemplaires de la famille. La figure initiale est formée de 4 segments de longueur 1.

1. Donner des régles de transfomation permettant de passer du dessin d'ordre n au dessin d'ordre n+1

2. Déterminer le périmétre de la figure (c'est à dire la longueur parcourue si vous faites le tour de la figure "au plus prés"). Le périmétre pour n=0 est 8.

3. Donner et résoudre une relation de récurrence permettant de calculer le nombre de segments extérieurs. La figure pour n=0 a 4 segments extérieurs

4. Donner et résoudre une relation de récurrence permettant de calculer le nombre de sommets. La figure initiale a 5 sommets, la suivante 13.