Université de Nice-Sophia Antipolis
École Supérieure en Sciences Informatiques

2003–2004

Examen Mathématiques Discrètes
du 21 Novembre 2004

Nom :______________________________

Prénom :______________________________

Groupe :______________________________

Tous documents autorisés

Note :

Durée : 2 heures

1	
2	
3	
4	
5	

Il vous est demandé de répondre sur la copie avec clarté, concision et rigueur. Certaines réponses peuvent être beaucoup plus courtes que le nombre de lignes pourrait le laisser supposer. Le barême est donné à titre indicatif.

1 acb, abcca, mais pas aacccb [4 points]

Soit A = {a,b,c}.

1. *Donner et prouver une définition inductive de L, le sous ensemble de A*, formé des mots contenant autant de a que de c (le nombre de b est quelconque).*
   Une définition possible parmi d'autres:
   Soit E l'ensemble défini inductivement par
   Base : ϵ et b appartiennent à E
   Règles :
   - $R1$:Si m est dans E alors amc est dans E
   - $R2$:Si m est dans E alors mca est dans E
   - $R3$:Si m et m' sont dans E, alors mm' est dans E.

   Montrons que $E = L$
   Version courte
   - il est clair que E est inclus dans L, car tous les éléments de la base de E ont autant de a que de c et que ceci est conservé par chacune des trois règles.
   - L inclus dans E
     Par récurrence sur la longueur des mots. $HR(k)$: Tout mot de L de longueur inférieure ou égale à k appartient à E.
     Comme ϵ est L et E, $HR(0)$ est bien vérifiée.
     Montrons $HR(k+1)$ en supposant $HR(k)$. Soit m, un mot quelconque de longueur $k+1$, on a alors deux cas et deux seulement (déjà fait en TD et se voit "clairement"

en utilisant le compteur habituel, $m.nombreDe(a) - m.nombreDe(c)$) :

– $m = ps$ avec p et s différents du mot vide, et p et s sont dans L : par hypothèse de récurrence et utilisation de $R3$, m est dans E
– sinon : $m = am'c$ ou $m = cm'a$ avec m' appartient à L, auquel cas par hypothèse de récurrence et utilisation de $R1$ ou $R2$, m est dans E

Version longue

– E est inclus dans L
  Par induction structurelle : Les élements de la base de E contiennent autant de a que de c. Les règles $R1$ et $R2$ préservent la propriété "avoir autant de a que de c" puisqu'elles ajoutent un a et un c. La règle $R3$ aussi, le mot mm' ayant un nombre de a (resp. de c) égal à la somme du nombre de a (resp. de c) de m et de m'.
– L inclus dans E
  Par récurrence sur la longueur des mots.
  $HR(k)$: Tout mot de L de longueur inférieure ou égale à k appartient à E
– Base: $k = 0$. Le seul mot de L de longueur 0 est ϵ, ce mot est bien dans E
– Propagation: Supposons $HR(k)$ vrai. Soit m un mot de L de longeur $k + 1$. Un et un seul de ces trois cas est toujours vrai : m commence par un a, un b ou un c.
  (a) $m = bm$ Puisque m est dans L, m' est dans L. Par $HR(k)$, m' est dans E, par $R3$ (b est dans E), m est dans E
  (b) $m = am'$. Puisque m est dans L, m a au moins deux lettres, on peut donc considérer la dernière lettre de m.
    – $m = am'c$. Puisque m est dans L, m' est dans L. Par $HR(k)$, m' est dans E, par $R1$, m est dans E.
    – $m = am'a$. Introduisons le compteur habituel.... un a vaut 1, un b 0 et un c vaut -1. Ce compteur vaut 1 sous la premiere lettre de a, 0 à la fin de m, et -1 à l'avant dernière position. Il s'annule donc quelque part entre la premiere et l'avant dernière lettre. Il existe donc un prefixe p de m qui appartient à L. Soit s tel que $m = ps$. Puis que p et m sont dans L, s est dans L. Par $HR(k)$, p et s sont dans E. Donc par $R3$, m est dans E.
    – m=am'b. Puisque m est dans L, am' est dans L. Par HR(k), am' est dans E, par R3, m est dans E
  (c) m=cm' Se traite comme le cas précédent.

2. *Le schéma que vous avez donné à la question 1. est -il libre ?*
   Non par exemple, le mot "b" qui est dans la base, peut aussi être obtenu par la règle $R3$

2 auto inverse [3 points]

On considère la fonction s de $A*$ dans $A*$ définie inductivement par

$$s(\epsilon) = \epsilon$$

et pour tout m de A^*

$$s(ma) = cs(m)$$

$$s(mb) = bs(m)$$

$$s(mc) = as(m).$$

Montrer que pour tout m de A, s(s(m))=m*

- On montre par induction que pour tout m de $A*$

$$s(am) = s(m)c$$

$$s(bm) = s(m)b$$

$$s(cm) = s(m)a.$$

  C'est vrai si m est le mot vide. Montrons que si c'est vrai pour m, alors c'est vrai pour (par exemple) mc: $s(amc) = as(am) = as(m)c = s(mc)c$ On nomtrerait de même que $s(bmc) = s(mc)b$ et $s(cmc) = s(mc)a$
- Montrons que pour tout m de $A*$, $s(s(m)) = m$, par induction structurelle
  - Base $s(s(\epsilon)) = \epsilon$
  - Supposons que $s(s(m)) = m$, alors $s(s(am)) = s(s(m)c) = as(s(m)) = am$, de même $s(s(bm)) = bm$ et $s(s(cm)) = cm$

3 N encore [5 points]

1. *En vous inspirant des définitions de N vues en TD, donner une définition inductive de N qui permette de définir facilement et inductivement l'écriture d'un entier en base 3.*
   - Base 0, 1 et 2 sont dans N
   - Si n est dans N et $n \neq 0$, alors 3n , 3n+1 et 3n+2 sont dans N

   Preuve : la même que pour l'exercice du TD. Note la condition $n \neq 0$ est indispensable pour assurer un schéma libre
2. *Donner une définition inductive de l'écriture d'un entier en base 3*
   - Base ecriture(0)=0, ecriture(1)=1, ecriture(2)=2,
   - Induction : Si $n \neq 0$, ecriture(3n)=ecriture(n).0, ecriture(3n+1)=ecriture(n).1, ecriture(3n+2)=ecriture(n).2
3. *Soit f la fonction qui associe à tout entier non nul la longueur de son écriture en base 3. Donner une définition inductive de f*
   - Base f(0)=1, f(1)=1, f(2)=2,
   - Induction : Si $n \neq 0$, f(3n)=f(n)+1, f(3n+1)=f(n)+1, f(3n+2)=f(n)+2

4 Soustraction [4 points]

1. *Donner et prouver une définition inductive libre de l'ensemble*

$$E = \{(m,n)/(m,n) \in N^2 \text{ et } m \geq n\}$$

   - Base $(n,n) \in E'$ pour tout n de N
   - R Si (m,n) appartient à E', alors $(m+1,n)$ appartient à E'

   Ce schéma est libre.
2. *Donner une définition inductive de la fonction soustrait de E dans N, telle que soustrait((m,n))=m-n .*
   - Base $soustrait((n,n)) = 0$
   - $soustrait((m+1,n)) = soustrait((m,n)) + 1$

5 ABD en long et en large cette fois [4 points]

En reprenant la définition vue en TD des arbres binaires ABD, on appelle largeur d'un arbre binaire ABD, le nombre maximum de noeuds (ϵ ou "rond") situés sur une même ligne de la représentation graphique de l'arbre.

1. *Dessiner un arbre de hauteur 5 et de largeur 4.*

2. *Donner une définition de la largeur d'un ABD utilisant l'induction*
   On défini inductivement la fonction largeurligne de ABDxN dans N de la manière suivante

   - largeurligne(T,1)=1
   - Si $i > hauteur(T) + 1$ alors largeurligne(T,i)=0
   - $largeurligne(T,i) = largeurligne(filsgauche(T),i-1) + largeurligne(filsdroit(T),i-1))$

   On a alors $largeur(T) = Max_{1 \leq i \leq hauteur(T)+1} largeur(T,i)$