Université de Nice-Sophia Antipolis
École Supérieure en Sciences Informatiques

2003–2004

Examen Mathématiques Discrètes
du 21 Novembre 2004

Nom :_____

Prénom :_____

Groupe :_____

Tous documents autorisés

Note :

Durée : 2 heures

1	
2	
3	
4	
5	

Il vous est demandé de répondre sur la copie avec clarté, concision et rigueur. Certaines réponses peuvent être beaucoup plus courtes que le nombre de lignes pourrait le laisser supposer. Le barême est donné à titre indicatif.

1 acb, abcca, mais pas aacccb [4 points]

Soit A = {a,b,c}.

1. Donner et prouver une définition inductive de L, le sous ensemble de A*, formé des mots contenant autant de a que de c (le nombre de b est quelconque).

2. Le schéma que vous avez donné à la question 1. est -il libre?

2 auto inverse [3 points]

On considère la fonction s de A* dans A* défini inductivement par

$$s(\epsilon) = \epsilon$$

et pour tout m de A*

$$s(ma) = cs(m)$$
$$s(mb) = bs(m)$$
$$s(mc) = as(m).$$

Montrer que pour tout m de A*, s(s(m))=m

3 N encore [5 points]

1. En vous inspirant des définitions de N vues en TD, donner une définition inductive de N qui permette de définir facilement et inductivement l'écriture d'un entier en base 3.

2. Donner une définition inductive de l'écriture d'un entier en base 3

3. Soit f la fonction qui associe à tout entier non nul la longueur de son écriture en base 3. Donner une définition inductive de f

4 Soustraction [4 points]

1. Donner et prouver une définition inductive libre de l'ensemble

$$E = \{(m,n)/(m,n) \in N^2 \ et \ m \geq n\}$$

2. Donner une définition inductive de la fonction soustrait de E dans N, telle que soustrait((m,n))=m-n .

5 ABD en long et en large cette fois [4 points]

En reprenant la définition vue en TD des arbres binaires ABD, on appelle largeur d'un arbre binaire ABD, le nombre maximum de noeuds (ϵ ou "rond") situés sur une même ligne de la représentation graphique de l'arbre.

1. Dessiner un arbre de hauteur 5 et de largeur 4.

2. Donner une définition de la largeur d'un ABD utilisant l'induction