Université de Nice-Sophia Antipolis
École Supérieure en Sciences Informatiques

2003–2004

Examen Mathématiques Discrètes
du 23 Janvier 2004

Nom :______________________________

Prénom :___________________________

Groupe:___________________________

Tous documents autoriss

Note :

Durée : 2 heures

1	
2	
3	
4	
5	

Il vous est demandé de répondre sur la copie avec clarté, concision et rigueur. Certaines réponses peuvent être beaucoup plus courtes que le nombre de lignes pourrait le laisser supposer. Le barême est donné à titre indicatif. Toutes vos réponses doivent être justifiées par une preuve.

1 Graphes [5 points]

Soit p un entier strictement positif. Soient $d_1,d_2,...d_p$ p entiers supérieurs ou égaux à trois. On note $GT(d_1,d_2,...d_p)$ le graphe dont les sommets sont tous les p-uplets $(x_1,...,x_i,...x_p)$ où pour tout i entre 1 et p, x_i est un entier compris entre 0 et $d_i - 1$. Il y a une arête entre $(x_1,...x_i,...x_p)$ et $(y_1,...,y_i,...y_p)$ si et seulement si il existe un entier j compris entre 1 et p tel que pour tout i différent de j, $x_i = y_i$ et d'autre part on a soit $x_j = y_j + 1$ modulo d_j ,soit $y_j = x_j + 1$ modulo d_j

1. Si p=1 , qu'est le graphe $GT(d_1)$? C'est un cycle de longueur d_1. En effet, lorsque p=1, les sommets sont tous les 1-uplets x_1 avec $0 \leq x_1 \leq d_1 - 1$, il y a donc d_1 sommets. D'après l'énoncé, il y a une arête entre (x_1) et (y_1) si et seulement si il existe un entier j compris entre 1 et 1 tel que pour tout i différent de j, $x_i = y_i$ et d'autre part on a soit $x_j = y_j + 1$ modulo d_j ,soit $y_j = x_j + 1$ modulo d_j. Le seul entier j possible ici est j=1, et la condition devient : il y a une arête entre (x_1) et (y_1) si et seulement si $x_1 = y_1 + 1$ modulo d_1 ,ou $y_1 = x_1 + 1$ modulo d_1.
2. Combien $GT(d_1,d_2,...d_p)$ a t-il de sommets, d'arêtes. Quel est le degré du sommet $(x_1,...x_i,...x_p)$? Le nombre de sommets est égal à n=$\Pi_{i=1}^{i=p} d_i$ Chaque sommet est de degré 2p, le nombre d'arêtes est donc pn.
3. Quel est le diamètre du graphe, c'est à dire la distance maximum entre deux sommets? La distance maximum entre deux sommet est $\sum_{i=1}^{i=p} \lfloor d_i/2 \rfloor$.
4. Sous quelles conditions sur $d_1,...d_i,....,d_p$, le graphe est-il biparti ? Soit i un entier entre 1 et p, le graphe contient un cycle de longueur d_i, à savoir, le cycle dont les sommets sont tous les sommets $(0,0,...0,x_i,0,...0)$, où x_i prend toutes les valeurs entre 0 et $d_i - 1$. Une condition necessaire est donc que tous les d_i soient pairs. Cette condition est aussi suffisante.

Notons P le sous ensemble des sommets dont la somme des coordonnées est paire, et I le sous ensemble des sommets dont la somme des coordonnées est impaire. Soient $(x_1,...x_i,...x_p)$ et $(y_1,...,y_i,...y_p)$ deux sommets reliés par une arête. Soit j l'unique entier telle que $x_j \neq x_j$, alors $\sum_{i=1}^{i=p} x_i = \sum_{i=1}^{i=p} y_i + 1 \text{ mod } d_j$ ou$\sum_{i=1}^{i=p} x_i = \sum_{i=1}^{i=p} y_i - 1 \text{ mod } d_j$. Comme d_j est pair, cela implique que $\sum_{i=1}^{i=p} x_i = \sum_{i=1}^{i=p} y_i + 1 mod 2$, et donc il ne peut pas y avoir d'arêtes entre deux sommets de P ou entre deux sommets de I.

2 Résolution de récurrence [5 points]

1. Donner l'ordre de grandeur des solutions de l'équation $u_n = 3u_{n-1} - 2u_{n-2} + 2^n + 3^n$
   L'équation homogène associée, $u_n = 3u_{n-1} - 2u_{n-2}$ a pour polynome caracteristique $x^2 - 3x + 2$ de racine 1 et 2 , et donc les solutions générales de l'equation homogène sont de la forme $u_n = a2^n + b$. Il existe une solution particuliere de l'équation homogène de la forme $u_n = (cn + d)2^n + e3^n$. Donc les solutions sont en $\Theta(3^n)$
2. Donner l'ordre de grandeur des solutions de l'équation $u_n = 4u_{n-1} - 3u_{n-2} + 2^n + 3^n$
   L'équation homogène associée, $u_n = 4u_{n-1} - 3u_{n-2}$ a pour polynome caracteristique $x^2 - 4x + 3$ de racine 1 et 3 , et donc les solutions générales de l'equation homogène sont de la forme $u_n = a3^n + b$. Il existe une solution particuliere de l'équation homogène de la forme $u_n = (cn + d)3^n + e2^n$. Donc les solutions sont en $\Theta(n.3^n)$

3 Définition inductive 5 points]

On considére l'ensemble E défini inductivement par:

- Base : (0,0) appartient à E
- R1 : Si (n,0) appartient à E, alors (n+1,0) appartient à E
- R2 : Si (n,m) (différent de (0,0)) appartient à E, alors (n,n+m) appartient à E

1. Donner et prouver une définition non inductive de E :
   Soit M l'emsemble des couples d'entiers de la forme (n,kn), où n et k sont deux entiers quelconques.
   L est clairement inclus dans M par induction structurelle, en effet tout couple de la forme (n,0) est dans M, et si (n,m)=(n,kn), alors (n,n+m)=(n,(k+1)n).
   Réciproquement, montrons M inclus dans L.
   Plus precisement, nous allons montrer par recurrence sur k que tout couple (n,kn) appartient à E.
   Pour $k = 0$, c'est vrai grace à la base et à la règle R1.
   Supposons le résultat vrai pour k donné. Quelque soit n, le couple (n,nk) appartient donc à E, mais d'après la règle 2 , il est donc de même du couple (n,nk+n)=(n,(k+1)k), et cela pour tout n.
2. Le schéma définissant E est-il libre ? Oui, le shéma est libre
   - (0,0) ne peut etre produit par la règle R1 car 0 n'est pas de la forme n+1 ni par la règle R2, car si (0,0)=(n,n+m) on a necessairement n=m=0, et le couple (0,0) ne peut etre choisit comme antécédent de la règle R2. En fait la règle R2 ne permet pas de produire un élément de la forme (k,0).
   - Si un élément est produit par la règle R2, il ne peut pas etre de la forme (n+1,0). De plus le seul antécédent possible à l'élément (n+1,0) est l'élément (n,0).
   - Un élément (i,j) produit par R2, ne peut l'etre qu'à partir de l'élément (i,j-i).
3. Donner une définition inductive de la fonction f de E dans N, telle que f(n,m)=m/n.
   f(0,0) n'est pas défini,
   f(0,n+1)=0
   f(n,m+n)= f(n,m) +1

4 Paire de points les plus proches [5 points]

4.1 Sur une droite

On considère n points x_1,x_2,....x_n sur une droite, triés par abcisse croissante, on désire trouver la distance minimum entre deux points.

1. Donner un algorithme dont la complexité est linéaire, qui permette de calculer cette plus petite distance.

Les points etant alignés, la distance mimimum est necessairement atteinte entre deux points consécutifs. Il suffit donc de calculer tous les $x_{i+1} - x_i$ (en assimilant les points à leur abcisses) et de déterminer le minimum, ce qui se fait en temps linéaire.

4.2 Dans le plan

On considère n points du plan x_1,x_2,....x_n , triés par ordre d'abcisse croissante, et l'on désire trouver la distance minimum entre deux points.

1. Dessiner un exemple, où la distance minimum n'est pas atteinte par un couple (x_i,x_{i+1}). Si l'on choisit les points x_1 = (0,0),x_2 = (1,100),x_3 = (2,0), la distance minimum est atteinte pour le couple (x_1,x_3)
2. Quelle est la complexité d'un algorithme qui calcule toutes les distances, puis détermine la distance minimum?
   Il y a cette fois $\Theta(n^2)$ distances à calculer l'algorithme serait donc en $\Theta(n^2)$
3. On propose un algorithme recursif.
   - On recherche (recursivement)la distance minimum entre deux points faisant partie des n/2 premiers points (triés), soit d_1 cette distance.
   - 0n recherche (recursivement) la distance minimum entre deux points faisant partie des n/2 derniers points (triés), soit d_2 cette distance.
   - 0n cherche la distance minimum parmi les paires constituées d'un point dans chacun des deux paquets, soit d_3 cette distance.
   - On calcule la distance minimale, en fonction de d_1,d_2 et d_3.

   En admettant que la recherche d'une paire la plus proche parmi les paires constituées d'un point dans chacun des deux paquets s'effectue en temps Θ(n), quelle est la complexité de cet algorithme?
   La complexité vérifie $c(n) = 2c(n/2) + n$, d'après le cours elle est donc en $\Theta(nlogn)$

5 Dessin récursif [5 points]

Voici les 3 premiers exemplaires de la famille. La figure initiale est formée de 4 segments de longueur 1.

1. Donner des régles de transfomation permettant de passer du dessin d'ordre n au dessin d'ordre n+1
   Dans la suite, on appelle segment extérieur, un segment qui "compte" dans le périmètre de la figure.
   La figure à l'ordre n+1 est obtenue à partir de la figure à l'ordre n en ajoutant au milieu de chaque segment exterieur un segment perpendiculaire de même longueur.
2. Déterminer le périmétre de la figure (c'est à dire la longueur parcourue si vous faites le tour de la figure "au plus prés"). Le périmétre pour n=0 est 8. Le périmètre est constant egal à 8

3. Donner et résoudre une relation de récurrence permettant de calculer le nombre de segments extérieurs. La figure pour n=0 a 4 segments extérieurs Dans la figure d'ordre n, tous les segments extérieurs sont de longueur $1/2^n$. Chaque segment extérieur compte pour un dans le périmètre, sauf 4 d'entre eux qui comptent pour deux. Soit s_n le nombre de segments extérieurs, on a $(s_n + 4)(1/2^n) = 8$ et donc $s_n = 2^{n+3} - 4$
4. Donner et résoudre une relation de récurrence permettant de calculer le nombre de sommets. La figure initiale a 5 sommets, la suivante 13.
   Le nombre de sommets $S(n)$ vérifie $S(n) = S(n-1)+2s_{n-1} = S(n-1)+2^{n+3}-4$. L'equation homogène associée a pour solution S(n)=k. On sait qu'il existe une solution particuliere de la forme $S(n) = a2^n + bn + c$. On doit avoir $a2^n + bn + c = a2^{n-1} + bn - b + c + 8.2^n - 4$, donc $a = 16$ et $b = -4$. La solution est donc de la forme S(n)=$16.2^n - 4n + c$, comme S(0)=5, $c = -11$, et l'on a $S(n) = 16.2^n - 4n - 11$