Exercices portant sur la démonstration par récurrence

Exercice 1

Montrez que la somme des n premiers entiers impairs est égal à n au carré

Exercice 2

Montrez que $2^{3n}-1$ est divisible par 7

Exercice 3

Initialement, le contenu d'un compteur C pouvant prendre les deux valeurs 0 et 1, est 0. On lit un mot binaire de gauche droite. Si le bit lu est 1 le contenu de C bascule, si c'est 0, C est inchangé. Montrer qu'en fin de lecture le mot obtenu en concaténant le mot binaire initial et C comporte un nombre pair de 1.

Exercice 4

Montrez que pour tout n dans entier naturel, $(n+1)^2-(n+2)^2-(n+3)^2+(n+4)^2=4$.
En déduire que tout entier m, peut s'écrire comme somme et différence des carrés $1^2,2^2,\ldots.n^2$ pour un certain n, c'est-à-dire que
$\forall m \in N,\ \exists n \in N, \exists \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots . \varepsilon n \in \{-1,1\},\ m=\varepsilon_1 1^2+\varepsilon_2 2^2+\ldots.+\varepsilon_n n^2$

Indication : commencez par montrer le résultat pour m=0,1,2 et 3