Quelques équations courantes dans les recherches de complexité d'algorithmes récursifs, et leur solution

Equation	Solution
$T(n)=T(n-1)$	$T(n)=\Theta(1)$
$T(n)=T(n-1)+1$	$T(n)= \Theta(n)$
$T(n)=T(n-1)+n^k$	$T(n)= \Theta(n^{k+1})$
$a>1$, $T(n)=aT(n-1)+ n^k$	$T(n)= \Theta(a^n)$
$a>1$, $T(n)=aT(n-1)+ a^n + n^k$	$T(n)= \Theta(n\ a^n)$
$a,b>1$, $T(n)=aT(n-1)+b^n$	$T(n)= \Theta(Max(a^n, b^n))$
$T(n)=2T(n/2)+1$	$T(n)= \Theta(n)$
$T(n)=2T(n/2)+n$	$T(n)= \Theta(nlogn)$
$T(n)=2T(n/2)+ n^k$	$T(n)= \Theta(n^k)$
$k<log_b a$, $T(n)=aT(n/b)+ n^k$	$T(n)= \Theta(n^{log_b\ a})$
$k=log_b a$, $T(n)=aT(n/b)+ n^k$	$T(n)= \Theta(logn\ n^k)$
$k>log_b a$, $T(n)=aT(n/b)+ n^k$	$T(n)= \Theta(n^k)$

Equations de récurrences linéaires

Theorème 1

Soit (E) : $u_n = \sum_{i=1}^{k} a_i u_{n-i}$ une équation de récurrence linéaire homogène d'ordre k à coefficients constants.

Si $P(x) = x^k - \sum_{i=1}^{k} a_i x^{k-i}$ le polynôme caractéristique associé possède t racines distinctes $r_1, r_2, ..., r_t$ de multiplicité respectivement $m_1, m_2, ..., m_t$, alors une suite v_n est solution de (E) si et seulement il existe des constantes $c_{i,j}, 1 \le i \le t, 0 \le j \le m_i - 1$, telles que

$$v_n = \sum_{i=1}^{t} r_i^n \left(\sum_{j=0}^{m_i-1} c_{i,j} n^j\right)$$

Théorème 2

Si sp_n est une solution particulière de l'équation de récurrence linéaire non homogène d'ordre k à coefficients constants (E') : $u_n = \sum_{i=1}^{k} a_i u_{n-i} + F(n)$. Alors toute solution de (E') est de la forme $sp_n + v_n$ où v_n est solution de (E) : $u_n = \sum_{i=1}^{k} a_i u_{n-i}$, equation de recurence lineaire homogène associée à (E')

Théorème 3

Soit l'équation de récurrence linéaire non homogène d'ordre k à coefficients constants (E') :

$u_n = \sum_{i=1}^{k} a_i u_{n-i} + F(n)$ avec $F(n) = P(n)s^n$ où P(n) est un polynôme en n de degré d.

Alors si s n'est pas racine du polynôme caractéristique associé à (E), E' admet une solution particulière de la forme $sp_n = Q(n)s^n$, où Q(n) est un polynôme en n de degré d.

Si s est racine d'ordre k du polynôme caractéristique associé à (E), E' admet une solution particulière de la forme $sp_n = Q(n)s^n$, où Q(n) est un polynôme en n de degré d+k.