

Exercices sur les ordres

Exercice 1

Pour chacune des relations binaires ci-dessous, dire si elle est réflexive, symétrique, transitive, antisymétrique ?

$$R_1 = \{(1, y), y \in \mathbb{N}\} \cup \{(x, x) \in \mathbb{N}^2\}$$

$$R_2 = \{(1, y), y \in \mathbb{N}\}$$

$$R_3 = \{(1, y), y \in \mathbb{N}\} \cup \{(2, x), x \in \mathbb{N}\}$$

Exercice 2

On considère l'ensemble A^* de tous les mots finis sur l'alphabet A (cet ensemble comprend le mot vide).

On dit que $m \leq m'$ si et seulement si m est un facteur de m' , c'est à dire qu'il existe deux mots p et s dans A^* tel que $pms = m'$.

Montrez qu'il s'agit d'un ordre bien fondé.

Exercice 3

Soient (A, \leq_A) et (B, \leq_B) deux ensembles ordonnés. Montrer que $(A \times B, \leq_{A \times B})$ est un ensemble ordonné si $\leq_{A \times B}$ est définie par :

$(a_1, b_1) \leq_{A \times B} (a_2, b_2)$ si et seulement si $a_1 <_A a_2$ ou $(a_1 = a_2$ et $b_1 \leq_B b_2)$.

Si \leq_A et \leq_B sont des ordres totaux, en est-il de même de $\leq_{A \times B}$?

Si \leq_A et \leq_B sont des ordres bien fondés, en est-il de même de $\leq_{A \times B}$?

Exercice 4

Soient (A, \leq_A) et (B, \leq_B) deux ensembles ordonnés. Montrer que $(A \times B, \leq_{A \times B})$ est un ensemble ordonné si $\leq_{A \times B}$ est définie par :

$(a_1, b_1) \leq_{A \times B} (a_2, b_2)$ si et seulement si $a_1 \leq_A a_2$ et $(b_1 \leq_B b_2)$.

Si \leq_A et \leq_B sont des ordres totaux, en est-il de même de $\leq_{A \times B}$?

Si \leq_A et \leq_B sont des ordres bien fondés, en est-il de même de $\leq_{A \times B}$?