COMPLEXITE

DEUXIEME PARTIE : RECURSIVITE

EXERCICE 11

Quel est le nombre minimum de mouvements nécessaires pour déplacer une « tour de Hanoi » de hauteur n ?

Dans le cours , on donne un algorithme qui est tel que si m_n est le nombre de mouvements utilisés pour déplacer une tour de Hanoi de hauteur n, on a $m_n = 2m_{n-1} +1$, et donc $m_n = 2^n-1$
Montrons que cet algorithme est le meilleur possible.
Appelons min_n le nombre minimum de mouvements nécessaires.
Le plus grand des disques doit nécessairement être déplacé au moins une fois.
Au moment du premier mouvement de ce grand disque, il doit être seul sur un piquet, son piquet de destination doit être vide, donc tous les autres disques doivent être rangés, dans l'ordre, sur le troisième piquet.
Donc avant le premier mouvement du grand disque, on aura du déplacé une pile de taille n-1.
Il en est de même après le dernier mouvement du grand disque. On a donc $min_n \geq 2min_{n-1}+1$.
Puisque l'on a un algorithme dont le nombre de mouvements vérifie $m_n = 2m_{n-1} +1$, cet algorithme est optimal.

EXERCICE 12

On considère deux versions modifiées des tours de Hanoi. Dans chacun des cas, on demande quel est le nombre minimum de déplacements de disques nécessaires.

1.La pile contient initialement 2n disques, de n tailles différentes, il y a deux disques de chaque taille. Les disques de même taille sont indistinguables.

2. La pile comporte n disques de tailles différentes, mais les 3 piquets sont sur un cercle et les mouvements élémentaires de disques se font du piquet où est le disque à son suivant dans le sens des aiguilles d'une montre.

1. L'algorithme récursif suivant est optimal :

Pour déplacer n disques doublés de A vers B
    déplacer les n-1 plus petits disques doublés de A vers C
    déplacer le grand disque du dessus de A vers B
    déplacer l'autre grand disque de A vers B
    déplacer les n-1 plus petits disques doublés de C vers B

Cet algorithme nécessite 2. (2^n -1) mouvements de disques

Il est optimal car tout algorithme nécessite de déplacer tous les disques.
et avant de déplacer pour la première fois le grand disque du dessus , il est nécessaire de déplacer les n-1 plus petits disques doublés de A vers un autre piquet, et après avoir déplacé pour la dernière fois le grand disque qui sera sur le dessus sur le piquet de destination finale, on devra aussi amener les n-1 plus petits disques doublés du piquet où ils sont vers C

2. Cette fois ci, on va utiliser deux algorithmes récursifs croisés.

Pour déplacer n disques de A vers B, ou de B vers C, ou de C vers A
Déplacer les n-1 petits disques de A vers C
Déplacer le grand disque de A vers B
Déplacer les n-1 petits disques de C vers B

Pour déplacer n disques de A vers C, ou de B vers A ou de C vers B
Déplacer les n-1 petits disques de A vers C
Déplacer le grand disque de A vers B
Déplacer les n-1 petits disques de C vers A
Déplacer le grand disque de B vers C
Déplacer les n-1 petits disques de A vers C

L'optimalité de ces deux algorithmes s'établit facilement, chaque mouvement du grand disque étant obligatoire et impliquant la position des autres disques.

Notons $d_1(n)$ (respectivement $d_2(n)$)le nombre de mouvements pour le premier (respectivement le second) de ces algorithmes.

On a $d_1(n)=2d_2(n-1)$ et $d_2(n)=d_1(n-1)+ 2d_2(n-1)+2$
On a donc $d_2(n)=2d_2(n-2)+ 2d_2(n-1)+3$
Résolvons cette équation.
L'équation de récurrence homogène associée est $u_n = 2u_{n-1} + 2u_{n-2}$
Le polynôme caractéristique associé est $x^2 - 2x - 2 = 0$
Les deux racines sont $r_1 = 1+\sqrt{3}$ et $r_2 = 1-\sqrt{3}$
Les solutions de l'équation homogène sont donc de la forme $u_n = \alpha(1+\sqrt{3})^n + \beta(1-\sqrt{3})^n$
Puisque 1 n'est pas racine du polynôme caractéristique, on sait que l'équation $d_2(n)=2d_2(n-2)+ 2d_2(n-1)+3$ admet une solution qui est une constante c. On a donc c=4c+3, donc c=-1.
Toute solution de $d_2(n)=2d_2(n-2)+ 2d_2(n-1)+3$ est donc de la forme $d_2(n) = \alpha(1+\sqrt{3})^n + \beta(1-\sqrt{3})^n - 1$
Pour déterminer les deux constantes, on utilise les valeurs de $d_2(0)=0$, et $d_2(1)=2$
On obtient $\alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}$ et $\beta = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}}$

On a donc $d_2(n) = (\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}})(1+\sqrt{3})^n + (\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}})(1-\sqrt{3})^n - 1$

et $d_1(n) = 2d_2(n-1)+1 = (1+\frac{2}{\sqrt{3}})(1+\sqrt{3})^{n-1} + (1-\frac{2}{\sqrt{3}})(1-\sqrt{3})^{n-1} - 1$

EXERCICE 13

Utilisez la méthode du polynôme caractéristique pour résoudre l'équation de récurrence $u_n = 4u_{n-1} - 4u_{n-2}, u_0 = 1, u_1 = 6$

Le polynôme caractéristique est x^2-4x+4, 2 est donc racine double.

Les solutions sont donc de la forme $u_n = 2^n(a+bn)$. Les premières valeurs de la suite permettent de déterminer a=1 et b=2

EXERCICE 14

Chaque jour, pour mon goûter, je m'achète soit une pomme à 2F, soit un café à 2F soit un hot dog à 4F. Je dois dépenser en un nombre quelconque de jours la somme de n francs.
Soit g_n le nombre de choix de goûters possibles si j'ai n francs
1. Déterminer g_1, g_2, g_3 et g_4
2. Déterminer et résoudre l'équation de récurrence liant les g_n

1. $g_1=g_3=0$ car il est impossible de dépenser un nombre impair de francs. g_2 est égal à 2, j'ai le choix entre acheter une pomme ou un café. g_4 est égal à 5, j'ai le choix entre acheter un hot dog, ou une pomme le premier jour et un café le second, ou une pomme le premier jour et une pomme le second, ou un café le premier jour et un café le second, ou un café le premier jour et un café le second.
2. Le premier jour, je peux acheter un hot dog et il me restera n-4 francs à dépenser, ce que je peux faire de g_{n-4} manières différentes, ou bien j'achète une pomme et il me reste n-2 francs à dépenser, ou bien j'achète un café et il me reste n-2 francs à dépenser . On a donc $g_n = g_{n-4} + 2g_{n-2}$ Puisque l'on sait que les termes d'indices impairs sont nuls, on peut considérer la suite $f_n = g_{2n}$ qui vérifie $f_n = f_{n-2} + 2f_{n-1}$. Le polynôme caractéristique est x^2-2x-1, ses deux racines sont $1+\sqrt{2}$ et $1-\sqrt{2}$.

Les solutions de $f_n = f_{n-2} + 2f_{n-1}$, sont donc de la forme
$f_n = \alpha(1+\sqrt{2})^n + \beta(1-\sqrt{2})^n$ On a $f_0=1$ et $f_1=2$, et donc
$$g_{2n} = \frac{1}{2}(1+\frac{1}{\sqrt{2}})(1+\sqrt{2})^n + \frac{1}{2}(1-\frac{1}{\sqrt{2}})(1-\sqrt{2})^n$$

EXERCICE 15

Donnez l'ensemble des solutions des équations de récurrences suivantes :
$u_n = 2u_{n-1} - u_{n-2}$, $v_n = v_{n-1} + 6v_{n-2}$
Le polynôme caractéristique associé à $u_n = 2u_{n-1} - u_{n-2}$ est x^2-2x+1

1 est donc racine double, et donc les solutions sont de la forme $u_n=an+b$
Le polynôme caractéristique associé à $v_n = v_{n-1} + 6v_{n-2}$ est x^2-x-6, il admet deux racines 3 et -2, les solutions sont de la forme $v_n = \alpha 3^n + \beta(-2)^n$

EXERCICE 16

Déterminez la suite u_n , telle que :
$u_n = 5u_{n-1} - 8u_{n-2} + 4u_{n-3}, u_1 = 3, u_2 = 11, u_3 = 31$
Le polynôme caractéristique est x^3-5x^2+8x-4, 1 est racine évidente et le polynôme est égal à $(x-1)(x^2-4x+4)$, donc 2 est racine double.
Les solutions de $u_n = 5u_{n-1} - 8u_{n-2} + 4u_{n-3}$ sont donc de la forme $u_n = a + 2^n(b + cn)$
Pour déterminer les constantes, on va utiliser $u_0=0$., plutôt qu'u3=31, on obtient a=-1, b=c=1.

EXERCICE 17

Résoudre $u_n = 2u_{n-1} + 1, u_0 = 0$

L'équation homogène associée a pour polynôme caractéristique x-2 et ses solutions sont donc de la forme $a2^n$. 1 n'étant pas racine, l'équation non homogène admet une solution constante, et cette constante vaut -1. Les solutions de l'équation non homogène sont donc de la forme $a2^n-1$. D'après la valeur initiale, a=1.

EXERCICE 18

Résoudre $u_n = 2u_{n-1} + n + 2^n, u_1 = 0$
L'équation homogène associée a pour polynôme caractéristique x-2 et ses solutions sont donc de la forme $a2^n$. 1 n'étant pas racine, mais deux l'étant, l'équation non homogène admet une solution de la forme $u_n = an + b + 2^n(cn + d)$
Les coefficients doivent donc vérifier
$an + b + 2^n(cn + d) = 2(a(n-1) + b + 2^{n-1}(c(n-1) + d)) + n + 2^n$. On en déduit a=-1,b=-2 et c=1

Les solutions de l'équation non homogène sont donc de la forme $-n-2+2^n(n+k)$. D'après la valeur initiale, k=-1/2

EXERCICE 19

Donnez l'ensemble des solutions des équations de récurrence suivantes :
$u_n=3u_{n-1}-2u_{n-2}+n$
$v_n=v_{n-1}+6v_{n-2}+5^n$
$w_n=w_{n-1}+6w_{n-2}+3^n$

Le polynôme caractéristique de l'équation homogène associée à la première équation est $x^2-3x+2=0$. Ses racines sont donc 1 et 2. Les solutions de l'équation homogène sont donc de la forme $a+b2^n$. 1 étant racine du polynôme caractéristique, il existe une solution particulière de la forme an^2+bn+c
En injectant cette forme dans l'équation, on obtient a=1/2 et b=1/2. Les solutions sont donc de la forme $u_n=k2^n+(n^2+n)/2+k'$

On obtient $v_n = \alpha 3^n + \beta(-2)^n - \frac{5}{2}3^n + \frac{25}{14}5^n + \frac{5}{7}(-2)^n$

et $w_n = \alpha 3^n + \beta(-2)^n + (\frac{3}{5}n - \frac{9}{25})3^n + \frac{9}{25}(-2)^n$