INDUCTION

1. *Soit M le sous ensemble de (0,1)* constitué des mots ayant autant de 0 que de 1. Soit E l'ensemble défini de manière inductive par*

Base $\varepsilon \in E$
Règles: $m \in E \Rightarrow 0m1 \in E$
$m \in E \Rightarrow 1m0 \in E$

a) Le schéma définissant E est –il libre?
b) A-t-on $M \subset E$*?*
c) A-t-on $E \subset M$*?*

a) le schéma définissant E est libre, en effet
- aucun mot ne peut être dans la base (donc de longueur de nulle) et produit par une règle (donc de longueur au moins deux)
- un mot se terminant soit par un un soit par un zéro, il ne peut être produit que par l'une des deux règles.
- Un seul antécédent est possible pour une règle donnée, car 0m1=0m'1 entraîne m=m' et de même 1m0=1m'0 entraîne m=m'.

b) Non , par exemple, le mot 0110 appartient à M (il comporte autant de zéro que de un), mais pas à E (il n'est pas dans la base et aucune règle ne peut le produire)
c) Oui. La preuve se fait facilement par induction structurelle
Base : le mot vide contient autant de zéro que de un(zéro de chaque)
Propagation : Supposons que m contienne autant de zéro que de un, alors clairement il en est de même de 0m1 et de 1m0.

2. *Donnez et prouvez une définition inductive pour l'ensemble des mots binaires palindromes*

Une définition possible est
Base : {ε,0,1} est inclus dans E
Règles :
Si m est dans E, alors 0m0 est dans E
Si m est dans E, alors 1m1 est dans E

Il est évident que ce schéma ne produit que des mots binaires palindromes et qu'en outre il produit tous les mots palindromes.
Il est tout aussi évident que ce schéma est libre.

3. *Donner et prouver une définition inductive pour l'ensemble des mots binaires ne comportant pas deux zéros consécutifs*

Soit E l'ensemble défini par le schéma inductif
Base ε , 0 sont dans E
Règle m,m' dans E $\Rightarrow$m1m' dans E
Montrons que E est égal à MB , l'ensemble des mots binaires ne comportant pas deux zéros consécutifs ;
E $\subset$MB
Démonstration par induction structurelle
Base ε et 0 sont dans MB
Propagation :Supposons que m,m' soient dans MB, alors m1m' ne comporte que les lettres 0 et 1, et ne comportent pas deux zéros consécutifs dans E
MB$\subset$E
Montrons par récurrence sur k que tout mot de MB de longueur inférieure ou égale à k appartient à E.
Base k=0 : le seul mot de MB de longueur inférieure ou égale à 0 est ε qui appartient à E
Hypothèse de récurrence : Pour un certain k, tout mot de MB de longueur inférieure ou égale à k appartient à E.
Soit m un mot de MB de longueur k+1.
Si m comporte un 1, m est de la forme $m_1 1 m_2$, où m_1 et m_2 sont deux mots de MB de longueur inférieure ou égale à k, et donc par hypothèse de récurrence ils sont dans E. Par définition de E m est aussi dans E.
Si m ne comporte aucun 1, m=0. et m est dans E

4. Donnez et prouvez une définition inductive pour l'ensemble des mots binaires représentant des entiers pairs sans zéro inutile en tête.

Soit E l'ensemble défini de manière inductive par
Base : 0 est dans E
Règles Si m est dans E alors 1m est dans E
Si m$\neq$0 et m ' sont dans E, mm' est dans E

Soit MBP l'ensemble des mots binaires représentant les entiers pairs sans zéro inutile en tête.

Montrons par induction structurelle que E$\subset$MBP
Base
0 représente bien un mot binaire pair sans 0 inutile en tête
Propagation
Supposons que m soit dans MB, alors 1m est aussi dans MB puis qu'il se termine par 0 et commence par un un.
Supposons que m et m' sont dans MB, et que m soit différent de 0, alors mm' commence par un un et termine par un zéro, et donc mm' est bien dans MBP

Montrons par récurrence sur k que tout mot de MBP de longueur au plus k est dans E.
Base k=1, le seul mot concerné est le mot 0 qui est dans E
Hypothèse de récurrence : pour un certain entier k>0, tout mot de MBP de longueur au

plus k est dans E.
Soit m un mot de MBP de longueur k+1. m est de longueur au moins deux, donc m commence par un 1 et termine par un 0
Si m est de longueur deux, m=10 et donc m appartient à MBP

Sinon, m=1m'0. Si m' termine par un 0, m=1n00, le mot 1n0 est dans MBP, il est de longueur k et donc il appartient à E et m aussi est dans E.
Sinon si m' ne comporte que des un, m=11n0, le mot 1n0 est dans MBP, il est de longueur k et donc il appartient à E et m aussi est dans E.
Sinon le mot m' comporte des 0 et des 1, de plus m' termine par un 1, m' est donc de la forme m'=n0$1^i$, donc m=1n0$1^i$0. Or 1n0 et 1^i0 sont deux mots de MBP de longueur inférieure à k, donc des mots de E, donc m est dans E.

5. *Donnez et prouvez une définition inductive de l'ordre préfixe et de l'ordre lexicographique.*

Soit E l'ensemble défini de manière inductive par
Base : (ε,ε) est dans E
Règles :
Pour toute lettre a de A, Si (m,m') est dans E alors (am,am') est dans E
Pour toute lettre a de A, Si (m,m') est dans E alors (m,m'a) est dans E

Vérifions que E = Pref où Pref est l'ensemble des couples (u,v) tels que u est préfixe de v.
La base de E est bien dans Pref, et par ailleurs il est immédiat que si m est un préfixe de m', alors d'une part am est un préfixe de am' et d'autre part m est un préfixe de m'a. Donc E est bien inclus dans Pref (tous les couples construits sont "corrects").
Réciproquement si u est préfixe de v, alors il existe un mot u' tel que uu' = v et il est clair que par applications des premières règles, on peut obtenir le couple (u,u), puis par applications des secondes le couple (u, uu') donc le couple (u,v). Donc Pref est inclus dans E (on obtient tous les couples "corrects" en utilisant le schéma).
Et donc finalement, E = Pref.

L'ordre lexicographique ne se définit "pas très bien" par un schéma inductif, car il faut tenir compte des 2 cas possibles pour lesquels u est plus petit que v pour cet ordre :
- soit u n'est un préfixe de v, auquel cas on peut (et on doit pouvoir) "ajouter" n'importe quel mot u' à droite de u et n'importe quel mot v' à droite de v, en gardant le fait que uu' est plus petit que vv'
- soit u est un préfixe de v, auquel cas on ne peut pas ajouter n'importe quel mot à droite de u.

On va donc définir inductivement l'ensemble des couples (u,v) tels que u est strictement avant v dans l'ordre lexicographique, mais que u n'est pas préfixe de v.
Base : (x,y) est dans E, pour tout couple de lettres (x,y) où x précède strictement y dans l'ordre alphabétique.
Règles :
Pour toute lettre x de A, Si (m,m') est dans E alors (xm,xm') est dans E
Pour toute lettre y et z de A, Si (m,m') est dans E alors (my,m'z) est dans E.

Il est clair que tout couple (u,v) de mots ainsi construit, est tel que u est est strictement avant v dans l'ordre lexicographique, mais que u n'est pas préfixe de v (tous les couples construits sont "corrects").
Et réciproquement, tout couple (u,v) tel que est est strictement avant v dans l'ordre lexicographique, mais que u n'est pas préfixe de v peut se mettre de manière unique sous la forme (u'xu",u'yv") où u', u" et v" sont des mots quelconques (éventuellement vides) et x une lettre strictement avant y dans l'ordre alphabétique. Il est lors évident que l'on peut obtenir (u'xu",u'yv") à l'aide des constructeurs donnés en partant de (x,y) (on obtient tous les couples "corrects" en utilisant le schéma).