INDUCTION

38. Donnez une définition inductive de l'ensemble des entiers pairs. Donnez une définition inductive des entiers relatifs

On peut définir les entiers pairs comme le plus petit ensemble qui contient 0 et qui est stable pour l'opération « ajouter 2 ».
On peut définir les entiers relatifs, comme le plus petit ensemble qui contient 0 et qui est stable pour les opérations « ajouter 1 » et « retirer un ».

39. Analyse constructive :Soit B_i la suite d'ensembles définie par

$B_0=B$
$B_{i+1}=\Omega(B_i)\ U\ B_i$
Soit $F=U\ B_i$
Soit E défini inductivement par le schéma (B,Ω)

Montrez que E=F

On va montrer la double inclusion
$E\subset F$
F contient la base B.
F est stable par Ω, en effet considérons une règle ω de Ω, d'arité p, soient $x_1,x_2,\ldots.x_p$, p éléments de F, chaque xi appartient à un certain B_{ji}. Soit j le plus grand de tous les indices ji, les p x_i appartiennent à B_j, donc $\omega(x_1,x_2,\ldots x_p)$ appartient à B_{j+1} et donc à F.

Puisque E est le plus petit ensemble au sens de l'inclusion, contenant B et stable par Ω, et puis que F lui aussi contient B et est stable par Ω, alors F contient nécessairement E
$F\subset E$
On va montrer par récurrence sur i que B_i est inclus dans E
Base :SI i=0, c'est vrai puisque E contient B
Hypothèse de récurrence, E contient B_i
Soit x dans B_{i+1} .Soit x est dans B_i et donc dans E, soit il est dans $=\Omega(B_i)$. Mais les éléments de B_i ,sont par hypothèse de récurrence des éléments de E, et E est stable par Ω , donc x est bien dans E

40. Un ensemble défini par induction structurelle, peut être muni d'un ordre bien fondé, lequel? Quels sont les éléments minimaux pour cet ordre?

Considérons la relation xRy si et seulement si il existe ω de Ω, $x=\omega(x_1,x_2,\ldots x_p)$ et il existe i tel $y=x_i$ et x différent de y.
Soit R' la fermeture transitive de R, c'est-à-dire la relation définie par
xR'y si et seulement si((xRy) ou (il existe z tel que xRz et zR'y)).
Notons $x\leq y$ si et seulement si x=y ou xR'y.
$\leq$ est un ordre (mais ce n'est pas forcement un ordre total).

Les éléments minimqux pour cet ordre sont les éléments de la base de l'ensemble.

41. Analyse descendante :Montrez que x appartient à E si et seulement si

—*x est dans B*
ou

—*il existe ω dans Ω, et un p-uplet $(x_1,x_2,\dots,x_p)$ d'éléments de E tel que x= $\omega(x_1,x_2,\dots,x_p)$*

Clairement si l'une des deux conditions est vérifiée, alors x appartient à E.
Réciproquement, supposons qu'il existe un élément de E ne vérifiant aucune de ces deux conditions. Soit y cet élément. Considérons F =E-$\{y\}$.
Puisque y n'appartient pas à B, et que B est inclus dans E, B est aussi inclus dans F.
Si l'on applique une règle à des éléments de F,on obtient un résultat dans E, qui ne peut pas être y, et donc qui est dans F.
F est donc stable pour Ω. Ceci contredit la définition de E, plus petit ensemble contenant B et stable pour Ω.

42. Les schémas donnés plus tôt pour définir les entiers, les entiers pairs, les entiers relatifs sont ils libres ?

Oui pour celui des entiers pairs, en effet 0 qui est dans la base ne peut pas être obtenu par la règle n donne n+2. Un élément qui n'est pas dans la base est obtenu par l'unique règle à partir de l'unique entier pari k-2

Non pour les entiers relatifs, 0 est dans la base, peut être obtenu en ajoutant un à moins un ou en retirant un à un.

43. Donner une définition par induction structurelle de l'ensemble A+ des mots finis non vides.

Base toute lettre un mot

Règle : Si m est un mot et a une lettre, am est un mot.

44. Donner une définition par induction structurelle de l'ensemble A des mots finis*

Base le mot vide est un mot

Règle : Si m est un mot et a une lettre, am est un mot.

45. Le premier schéma définissant les mots finis non vidse est il libre ?

Oui, parce que la règle produit des mots ayant au moins deux lettres, et qu'un mot produit par la règle à un antécédent unique

46. Le second schéma définissant les mots finis non vide est il libre ?

Non, le mot aaaa peut être produit par la règle à partir de (aa,aa) ou à partir de (a,aaa)

47. Donner deux exemples de schéma inductif ne comportant qu'une seule règle et cependant non libre?

C'est le cas pour le deuxième schéma définissant les mots.
C'est aussi le cas pour le schéma suivant
Base a,b,c, et d sont dans E
Règle si x et y sont dans E, x+y est dans E

Ce schéma n'est pas libe car a+b+c peut être formé à partir de a+b et de c ou de a et de b+c.

48. Le schéma définissant les mots finis est-il libre ?

Oui, car ε ne peut être produit par une règle (tout mon produit contient au moins une lettre), et un mot produit par la règle ne peut avoir qu'un antécédent.

49. Les mots suivants sont-ils dans LP?

- *((())*
- *((((()))))*
- *(())()*
- *()(())*
- *()()()*
- *(()())(())*

Montrons que tous les mots de la forme $(^i)^i$ sont dans LP (cette notation représente un mot formé de i parenthèses ouvrantes suivies de i parenthèses fermantes).
Par récurrence sur i.
Si =0 c'est vrai , car l mot vide est dans LP
On suppose que c'est vrai pour un certain i. Le mot $(^{i+1})^{i+1}$ est aussi dans LP car il peut être produit par la règle en prenant u=$(^i)^i$ et v=ε.
Le premier mot n'est pas dans LP, car il ne contient pas aurant de (que de). On justifiera plus tard cette intuition
Le second est dans LP
Le troisième est dans LP car il peut être produit par la règle en choisissant u=v=()
Le quatrième est dans LP car il peut etre produit parla règle en choisissant u=ε et v=(())
Le cinquième est dans LP car il peut etre produit par la règle en choisissant u=ε et v=()(), lequel v est dans LP car il peut etre produit par la règle en choisissant u'=ε et

v'=().
Le sixième est dans LP car il peut etre produit par la règle en choisissant u=()()ε et v=(())

50. Exercice 13

Démontrez la validité de l'induction structurelle

Si ce n'etait pas le cas, il existerait une propriété P et un ensemble E défini par un schéma inductif, tel que P soit vrai pour tout élément de la base, P soit propagée par chacune des règles du schéma et cependant il existe au moins un élément e de E pour le quel la propriété est non vide.
Soit F le sous ensemble de E constitué des éléments de E pour lesquels la propriété P est vraie.
B est inclus dans F puisque P est vrai pour tout élément de la base
F est stable par les règles du schéma définissant E puisque P est propagée par chacune des règles du schéma
F est strictement inclus dans E.
Ce qui contredit le fait que E est le plus petit ensemble contenant B et stable parles règles.

51. Montrer que ces définitions sont bien correctes pour N2

$(0,0) \in E$
$(n,m) \in E \Rightarrow (n,m+1) \in E$
$(n,m) \in E \Rightarrow (n+1,m) \in E$

$(0,0) \in F$
$(n,m) \in F \Rightarrow (n,m+1) \in F$
$(n,0) \in F \Rightarrow (n+1,0) \in F$

En déduire deux schémas de preuve par induction sur N^2

Premier ensemble
E est inclus dans N^2.
Par induction structurelle
Base (0,0) est dans N^2
Supposons (n,m) dans N^2, alors (n+1,m) et (n+1,m) sont dans N^2

N^2est inclus dans E
On va montrer par récurrence sur k que n≤k, m≤k impliquent que (n,m) est dans E.

Pour k=0, c'est vrai car (0,0) est dans E
On suppose que pour un certain k, n≤k, m≤k impliquent que (n,m) est dans E.
Soit (n,m) tels que n≤k+1 et m≤k+1.
Sin≤k et m≤k , (n,m) est dans E.

Si $n \leq k$, et $m=k+1$, alors par hypothèse de récurrence, (n,m-1) est dans E et donc (n,m) est dans E .
Si $m \leq k$, et $n=k+1$, alors par hypothèse de récurrence, (n-1,m) est dans E et donc (n,m) est dans E .
(k,k) étant dans E, (k+1,k) est dans E et (k+1,k+1) aussi.
On en déduit qu'une propriété P(n,m) est vraie pour tout les couples d'entiers (n,m) si et seulement si P(0,0) est vraie, et $P(n,m) \Rightarrow P(n+1,m)$ et $P(n,m) \Rightarrow P(n+1,m)$

Second ensemble
F est inclus dans N^2.
Par induction structurelle
Base (0,0) est dans N^2
Supposons (n,m) dans N^2, alors (n+1,m) est dans N^2
Supposons (n,0) dans N^2, alors (n+1,0) est dans N^2

N^2est inclus dans F
On va montrer par récurrence sur k que $n+m \leq k$ impliquent que (n,m) est dans F.

Pour k=0, c'est vrai car (0,0) est dans F
On suppose que pour un certain k, $n+m \leq k$ impliquent que (n,m) est dans E.
Soit (n,m) tels que $n+m \leq k+1$.
Si m=0, alors par hypothèse de récurrence, (n-1,0) est dans F et donc (n,m) est dans F .
Si m est non nul,
si n est nul, alors (n,m) est dans F,
sinon (n-1,m) est dans N^2et donc par hypothèse de récurrence dans F. Par définition de F, (n,m) est donc dans F.
On en déduit qu'une propriété P(n,m) est vraie pour tout les couples d'entiers (n,m) si et seulement si P(0,0) est vraie, et $P(n,m) \Rightarrow P(n+1,m)$ et $P(n,0) \Rightarrow P(n+1,0)$

52. Soit M le sous ensemble de (0,1) constitué des mots ayant autant de 0 que de 1.*
Soit E l'ensemble défini de manière inductive par

Base $\varepsilon \in E$
Règles: $m \in E \Rightarrow 0m1 \in E$
$m \in E \Rightarrow 1m0 \in E$

a) Le schéma définissant E est –il libre?
b) A-t-on $M \subset E$*?*
c) A-t-on $E \subset M$*?*

a) le schéma définissant E est libre, en effet
- aucun mot ne peut être dans la base (donc de longueur de nulle) et produit par une règle (donc de longueur au moins deux)
- un mot se terminant soit par un un soit par un zéro, il ne peut être produit que par l'une des deux règles.
- Un seul antécédent est possible pour une règle donnée, car 0m1=0m'1 entraîne m=m' et de même 1m0=1m'0 entraîne m=m'.

b) Non , par exemple, le mot 0110 appartient à M (il comporte autant de zéro que de un), mais pas à E (il n'est pas dans la base et aucune règle ne peut le produire)

c) Oui. La preuve se fait facilement par induction structurelle

Base : le mot vide contient autant de zéro que de un(zéro de chaque)

Propagation : Supposons que m contienne autant de zéro que de un, alors clairement il en est de même de 0m1 et de 1m0.