29. Montrer la Proposition : Si E' a un maximum (resp. minimum), alors c'est son unique élément maximal (resp. minimal).

Supposons que E' admette un maximum M, c'est-à-dire un élément M qui appartient à E' et qui est supérieur ou égal à tout élément de E'.
Montrons d'abord que M est un élément maximal.
Supposons qu'il existe un y dans E' tel que $y \geq M$, comme M est maximum, on a aussi $y \leq M$, et donc $y=M$. Donc M est bien un élément maximal.
Considérons M' un élément maximal quelconque de E', alors puisque M est un maximum on a $M \geq M'$. Mais puisque M' est maximal, cela entraîne $M=M'$. M est donc bien l'unique élément maximal.

30. ***La réciproque de la proposition :*** *Si E' a un maximum (resp. minimum), alors c'est son unique élément maximal (resp. minimal) est elle vraie ?*

Non, elle est fausse. Considérons l'ensemble ordonné constitué de l'ensemble E des intervalles de R muni de l'inclusion. Soit E' le sous ensemble de E formé de l'intervalle [1,2], et de tous les intervalles [3,n], avec n entier , $n>3$. E' ne contient qu'un élément maximal, l'intervalle [1,2], mais cependant E' n'a pas de maximum.

En revanche, si l'ensemble ordonné $(E, \leq)$ est muni d'ordre total, alors si un sous ensemble E' ne contient un élément maximal, alors cet élément est unique. En effet si M et M' sont deux éléments maximaux on a soit $M \leq M'$ soit $M' \leq M$, et M et M' étant maximaux on en déduit $M=M'$.
De plus cet élément maximal est aussi maximum. En effet supposons que M soit maximal et que M ne soit pas maximum. Alors il existe m dans E, tel que $m \leq M$ n'est pas vrai. Comme la relation d'ordre est totale, cela signifie que l'on a $M<m$, et donc puisque M est maximal, on a $m=M$, une contradiction.

31. Démontrer par l'absurde la proposition : Un ensemble ordonné $(E,\leq)$ est bien fondé si et seulement si toute partie non vide de E admet au moins un élément minimal.

Supposons qu'un ensemble soit bien fondé et qu'il existe une partie non vide F n'admettant pas d'élément minimal. On peut alors construire une suite infinie décroissante u_n de la manière suivante. Pour u_1, on choisit un élément quelconque de F, F n'admettant pas d'élément minimal, il y a dans F des éléments strictement plus petits que u_1, on en choisit un que l'on nomme u_2. Supposons que la suite soit construite jusqu'au rang n, F n'admettant pas d'élément minimal, il y a dans F des éléments strictement plus petits que u_n, on en choisit un que l'on nomme u_{n+1}. On peut donc construire ainsi une suite infinie strictement décroissante, contradiction.

Réciproquement, supposons que toute partie non vide de E admette au moins un élément minimal. Si l'ensemble n'est pas bien fondé, c'est qu'il existe une suite infinie strictement décroissante u_n. Soit E' le sous ensemble composé des éléments de cette suite, E' est une partie de E non vide. Elle doit donc admettre un élément minimal u. Comme u appartient à E', il existe un certain k tel que $u=u_k$. Puisque la suite est strictement décroissante, on a $u_{k+1} < u_k=u$. Puisque u est minimal ceci entraîne $u_{k+1}=u=u_k$, contradiction.

32. (IN,≤) est-il bien fondé (relation d'ordre usuelle) ?

Oui. Si le premier terme d'une suite strictement décroissante est k, la suite a au maximum k+1 termes

33. (Z,≤) est-il bien fondé (relation d'ordre usuelle) ?

non, car la suite un=-n est une suite infinie décroissante

34. L'ordre préfixe est-il bien fondé ?

Oui , car si u est préfixe de v et u est différent de v, alors la longueur de u est inférieure à la longueur de v, et donc il ne peut donc pas y avoir de suite infinie strictement décroissante.
35.

36. L'ordre lexicographique est-il bien fondé ?

Il l'est si l'alphabet ne comporte qu'une seule lettre, sinon il ne l'est pas, car la suite $a^n b$ est une suite infinie strictement décroissante.

37. Donner un bon ordre sur l'ensemble des mots sur un alphabet fini A.

Par exemple u ≤ v si lg(u) < lg(v) ou (lg(u)=lg(v) et u infLex v).
Il s'agit bien d'un ordre, en effet :

- u ≤ u, donc la relation est reflexive.
- Elle est transitive :

Supposons u ≤ v et v ≤ w

Cas 1 : lg(u) < lg(v)

Cas 1.1 lg(v) < lg(w). Dans ce cas lg(u)<lg(w) et donc u ≤w
Cas 1.2 (lg(w)=lg(v) et v infLex w)., dans ce cas lg(u)<lg(w) et donc u ≤w

Cas 2 (lg(u)=lg(v) et u infLex v).

Cas 2.1 lg(v)< lg(w), dans ce cas lg(u) < lg(w) et donc u ≤w

Cas 2.2 (lg(w)=lg(v) et v infLex w). dans ce cas lg(u)=lg(w) et u infLex w, donc u ≤w.

- Elle est antisymétrique

Supposons u ≤ v et v ≤u

Cas 1 : lg(u) < lg(v)

Cas 1.1 lg(v) < lg(u). impossible
Cas 2.2 (lg(u)=lg(v) et v infLex u), impossible

Cas 2 (lg(u)=lg(v) et u infLex v).

Cas 2.1 lg(v)< lg(u), impossible
Cas 2.2 (lg(u)=lg(v) et v infLex u). dans ce cas u=v.

Il s'agit donc bien d'une relation d'ordre.
C'est un ordre total, puisque inflex est un ordre total.
L'ordre est bien fondé, en effet considérons un mot m sur l'alphabet A. Il n'existe qu'un nombre fini de mots strictement inférieur à m. En effet, il y a un nombre fini de mots de

longueur strictement plus petite à celle de m, et un nombre fini de mots de longueur égale à m.

38. Validité du raisonnement par induction bien fondée

Supposons que E soit muni d'un ordre bien fondé $\leq$. Supposons que pour une propriété P, on ait montré :

1. P(y) est vrai pour tous les y minimaux dans E
2. Si P(z) est vrai pour tous les z, z<x, alors P(x) est vrai

Montrons qu'alors P est vrai pour tous les éléments de E.

Soit F={x/ Px) vrai}.
Supposons que F ne soit pas vide. Dans ce cas puisque l'ordre considéré est bien fondé, F admet un élément minimal f. Puisque f est dans F, P(f) est faux.
Considérons un élément z tel que z<f. Puisque f est minimal dans F, z n'appartient pas à F. Donc P(z) est vrai. Donc d'après la condition 2. On a P(f) vrai, contradiction. Donc F est non vide, donc la propriété P est vraie pour tous les éléments de E.

39. Montrer que le programme suivant termine sur tous les couples d'entiers naturels strictement positifs :

```
while (m !=n) {
        if (m>n) {
                m=m-n;
             }
        else {n=n-m}
        }
```

Considérons la suite des valeurs prises par m+n au fur et à mesure des itérations de la boucle, cette suite est strictement décroissante dans N, cette suite est donc finie, le nombre d'itération l'est donc aussi.

40. Donnez une définition inductive de l'ensemble des entiers pairs. Donnez une définition inductive des entiers relatifs

On peut définir les entiers pairs comme le plus petit ensemble qui contient 0 et qui est stable pour l'opération « ajouter 2 ».
On peut définir les entiers relatifs, comme le plus petit ensemble qui contient 0 et qui est stable pour les opérations « ajouter 1 » et « retirer un ».

41. Analyse constructive :Soit B_i la suite d'ensembles définie par

$B_0=B$
$B_{i+1}=\Omega(B_i) \cup B_i$
Soit $Y=\cup B_i$
Soit X défini inductivement par le schéma (B,Ω)

Montrez que X=Y

On va montrer la double inclusion

$X \subset Y$

Y contient la base B.

Y est stable par Ω, en effet considérons une règle ω de Ω, d'arité p, soient $x_1,x_2,\ldots x_p$, p éléments de Y, chaque xi appartient à un certain B_{ji}. Soit j le plus grand de tous les indices ji, les p x_i appartiennent à B_j, donc $\omega(x_1,x_2,\ldots x_p)$ appartient à B_{j+1} et donc à Y.

Puisque X est le plus petit ensemble au sens de l'inclusion, contenant B et stable par Ω, et puis que Y lui aussi contient B et est stable par Ω, alors Y contient nécessairement X

$Y \subset X$

On va montrer par récurrence sur i que B_i est inclus dans X

Base :Si i=0, c'est vrai puisque X contient B

Hypothèse de récurrence, X contient B_i

Soit x dans B_{i+1} .Soit x est dans B_i et donc dans X, soit il est dans $=\Omega(B_i)$. Mais les éléments de B_i sont par hypothèse de récurrence des éléments de X, et X est stable par Ω , donc x est bien dans X