INDUCTION

1. *Montrez par récurrence que pour tout entier n , la somme des n premiers entiers non nuls est égale à $n(n+1)/2$*

$P(n)$ est ici la propriété (en notant S_n , la somme des n premiers entiers non nuls) : $S_n = n(n+1)/2$

Base :

On commence par vérifier que le résultat est vrai pour $n = 0$: en effet la somme d'aucun entier vaut 0.

Hypothèse de récurrence (appelée aussi **Hypothèse d'induction**) :

On suppose que le résultat est vrai à l'ordre n , c'est-à-dire $S_n = n(n+1)/2$.

Montrons qu'alors le résultat est vrai à l'ordre $n+1$, c'est-à-dire que la somme des $S_{n+1} = (n+1)(n+2)/2$.

$S_{n+1} = S_n + (n+1)$, donc par hypothèse d'induction : $S_{n+1} = n(n+1)/2 + (n+1)$.

Puis en factorisant $(n+1)$, on obtient ce que l'on cherche $S_{n+1} = (n+1)(n+2)/2$.

2. *Montrez par récurrence que la somme des cubes des n premiers entiers non nuls est égal au carré de la somme de ces entiers*

$P(n)$ est ici la propriété (en notant S_n , la somme des n premiers entiers non nuls et $SommeDesCubes_n$, la somme des cubes des n premiers entiers non nuls) :

$SommeDesCubes_n = (S_n)^2$

Base : On commence par vérifier que le résultat est vrai pour $n=0$, en effet la somme d'aucun cube vaut 0.

Hypothèse de récurrence

On suppose que le résultat est vrai à l'ordre n , c'est-à-dire $SommeDesCubes_n = (S_n)^2$.

Montrons que le résultat est vrai à l'ordre $n+1$

La somme des cubes des $n+1$ premiers entiers non nuls, est égale à $(n+1)^3$ plus la somme des cubes des n premiers entiers non nuls qui par hypothèse d'induction est égale à $(n(n+1)/2)^2$. Donc la somme des cubes des $n+1$ premiers entiers non nuls est bien $(n+1)(n+2)/2)^2$.

3. *Modifiez la forme du raisonnement par récurrence pour prouver inductivement qu'une propriété est vraie pour les entiers pairs, puis pour les entiers relatifs*

Pour les entiers pairs, il suffit de montrer $P(0)$ et que pour tout n pair, $P(n)$ entraîne $P(n+2)$

Pour les entiers relatifs, il suffit de montrer $P(0)$ et que pour tout n positif, $P(n)$ entraîne $P(n+1)$ et $P(n-1)$

D'autres formulations sont possibles.

4. *Validité de la récurrence*

Supposons qu'il existe une propriété P qui soit vraie pour 0, qui si elle est vraie pour n soit vraie pour $n+1$ et qui cependant n'est pas vraie pour tous les entiers. Soit F l'ensemble des entiers pour lesquels cette propriété est fautive. F est non vide par hypothèse, donc F étant un

sous ensemble non vide de N possède un plus petit élément, soit n_0 celui ci. Comme n_0 ne peut pas être nul, $n_0 - 1$ est un entier, qui par définition du plus petit élément n'est pas dans F . Donc la propriété P est vraie pour $n_0 - 1$, et par donc elle est vraie pour $n_0 - 1 + 1 = n_0$, une contradiction.

5. *Trouver l'erreur dans la démonstration suivante de la propriété suivante : pour tout n entiers, si un paquet de n pièces contient une pièce de un euro, alors ce paquet ne contient que des pièces de un euros*

Base : Cette propriété est bien sûr vraie pour $n=1$.

Induction : Supposons donc que la propriété est vraie pour tout paquet de n pièces.

On va montrer qu'alors elle est vraie pour tout paquet de $n+1$ pièces.

*Soit donc un paquet de $n+1$ pièces contenant une pièce de 1€. Retirons l'une des pièces qui ne soit pas cette pièce, on a un paquet de n pièces. Ce paquet contient une pièce de 1€. Par hypothèse de récurrence, ce paquet ne contient donc que des pièces de 1€. Rajoutons la pièce qu'on avait enlevée : si c'est 1€, on a terminé. Sinon, enlevons du paquet une des n autres pièces. **On obtient alors un nouveau paquet de n pièces contenant au moins 1€, et par hypothèse de récurrence il ne contient que des pièces de 1€.***

On a donc prouvé qu'il n'y a que des pièces de 1€ ???

L'affirmation erronée a été mise en gras dans le texte.

L'étape inductive n'est pas vraie pour $n=1$, c'est-à-dire que que $p(1)$ n'implique pas $P(2)$, car le **nouveau paquet de 1 pièce ne contient pas nécessairement 1€!**

6. *Nous allons démontrer que lorsque n pièces de monnaies, avec n supérieur à 2, d'apparence identique sont données, avec une plus légère que les autres, alors il suffit d'une pesée sur une balance à 2 plateaux pour identifier la plus légère.*

Lorsque $n=2$, c'est facile ! On place une pièce sur chaque plateau de la balance, l'équilibre ne se fait pas car par hypothèse une des pièces est plus légère, et cette pesée permet de la déterminer.

*On suppose maintenant que l'on connaît une procédure utilisant une pesée pour n pièces, et montrons comment en obtenir une pour $n+1$ pièces. Donnons-nous $(n+1)$ pièces dont l'une est plus légère que les autres (qui, elles, ont toutes un poids identique). Nous mettons à part l'une des pièces, et **appliquons la procédure donnée par l'hypothèse de récurrence pour les n pièces restantes**. Si cette procédure fonctionne, on connaît la pièce la plus légère, sinon, c'est celle qu'on a mis à part qui est la plus légère.*

L'affirmation erronée a été mise en gras dans le texte. On ne peut pas appliquer la procédure donnée par l'hypothèse de récurrence, car parmi ces n pièces restantes, il n'y a pas nécessairement la pièce plus légère (elle n'y est pas si par malchance, on a mis à part cette pièce plus légère) et rien n'est dit ce que fait la procédure pour un paquet de n pièces toutes de même poids.

7. Justification de la récurrence forte

Première démonstration

Supposons qu'il existe une propriété P qui soit vraie pour 0 , qui si elle est vraie pour tout entier $m < n$ est aussi vraie pour n et qui cependant n'est pas vraie pour tous les entiers. Soit F l'ensemble des entiers pour lesquels cette propriété est fautive. F est non vide par hypothèse, donc F étant un sous ensemble non vide de $\mathbb{N}$ possède un plus petit élément, soit n_0 celui-ci. La propriété P est vraie pour tous les entiers strictement plus petits que n_0 , par définition du plus petit élément de F . Elle est donc vraie pour n_0 , une contradiction.

Seconde démonstration

Soit $Q(n)$ la propriété : Pour tout $m < n$ $P(m)$ est vrai.

Alors une récurrence forte sur P est équivalente à une récurrence simple sur Q

8. Montrer que tout nombre entier positif est le produit de (un ou plusieurs) nombres premiers.

Preuve par récurrence forte

Base : c'est vrai pour $n=2$, puisque 2 est lui-même premier.

Induction : Supposons que tout entier strictement inférieur à n soit le produit de un ou plusieurs nombres premiers.

Montrons que n est le produit de un ou plusieurs entiers premiers.

Si n est premier, n lui-même est le produit de un nombre premier.

Sinon, n admet deux diviseurs d et p , différent de 1 et de n . On a donc $n=dp$, où d et p sont deux entiers strictement inférieur à n . Chacun d'eux est donc le produit d'un ou plusieurs nombres premiers, et n est donc lui-même le produit d'un ou plusieurs nombres premiers.

9. Donnez un exemple d'ordre total et un exemple d'ordre partiel.

Il y en a plusieurs dans le cours, la relation « inférieur ou égal » sur les entiers ou les réels est un ordre total (lorsque l'on compare deux entiers, il y en a toujours un qui est inférieur ou égal à l'autre), en revanche la relation d'inclusion pour les parties d'un ensemble est un ordre partiel (si l'on regarde les deux ensembles $\{1\}$ et $\{2\}$, aucun n'est inclus dans l'autre).

10. Montrer que la relation être préfixe est une relation d'ordre.

La relation est réflexive, un mot est préfixe de lui-même. Elle est antisymétrique, c'est-à-dire que si u est préfixe de v et que v est préfixe de u , alors nécessairement les deux mots sont de même longueur, et ont toutes leurs lettres identiques, ils sont donc égaux.

La relation est aussi transitive, si u est préfixe de v , et v préfixe de w , alors u est préfixe de w . Ce n'est pas un ordre total, par exemple deux mots chacun composé d'une seule lettre ne sont pas préfixe l'un de l'autre si ces deux lettres sont différentes.

11. Définir formellement l'ordre lexicographique. Montrez qu'il s'agit bien d'un ordre et dites s'il est partiel ou total

On suppose que l'alphabet est muni d'une relation d'ordre total $\leq$.

Soient $u=u_1u_2\dots u_n$ et $v=v_1v_2\dots v_m$ deux mots sur A , on définit la relation infLex par $u \text{ infLex } v$ si et seulement si
ou u est un préfixe de v
ou il existe k , $0 \leq k < \inf(n,m)$ tel que pour tout $i \leq k$ $u_i=v_i$ et $u_{k+1} \leq v_{k+1}$ et $u_{k+1} \neq v_{k+1}$.

Il s'agit bien d'un ordre, en effet

- infLex est réflexive, car $u \text{ infLex } u$ puisque u est préfixe de u .
- infLex est antisymétrique, en effet supposons $u \text{ infLex } v$ et $v \text{ infLex } u$

Cas 1 u est préfixe de v , on a alors deux sous cas :

Cas 1.1 v est préfixe de u , on a alors $u=v$

Cas 1.2 il existe k , $0 \leq k < \inf(\text{longueur}(u), \text{longueur}(v))$ tel que pour tout $i \leq k$ $u_i=v_i$ et $v_{k+1} \leq u_{k+1}$ et $u_{k+1} \neq v_{k+1}$, mais ceci est incompatible de v préfixe de u

Cas 2 il existe k , $0 \leq k < \inf(n,m)$ tel que pour tout $i \leq k$ $u_i=v_i$ et $u_{k+1} \leq v_{k+1}$ et $u_{k+1} \neq v_{k+1}$.

Cas 2.1 v est préfixe de u : mais ceci est incompatible

Cas 2.2 il existe k , $0 \leq k < \inf(\text{longueur}(u), \text{longueur}(v))$ tel que pour tout $i \leq k$ $u_i=v_i$ et $u_{k+1} \leq v_{k+1}$ et $u_{k+1} \neq v_{k+1}$, mais ceci est incompatible

Donc nécessairement on a $u=v$ et la relation est bien antisymétrique

- infLex est transitive

Supposons $u \text{ infLex } v$ et $v \text{ infLex } w$

Cas 1 u est préfixe de v

Cas 1.1 v est préfixe de w , dans ce cas, u est préfixe de w et donc $u \text{ infLex } w$

Cas 1.2 il existe k , $0 \leq k < \inf(\text{longueur}(v), \text{longueur}(w))$ tel que pour tout $i \leq k$ $w_i=v_i$ et $v_{k+1} \leq w_{k+1}$ et $w_{k+1} \neq v_{k+1}$,

Cas 1.2.1 $\text{longueur}(u) \leq k$ dans ce cas u est préfixe de w et donc $u \text{ infLex } w$

Cas 1.2.2 $\text{longueur}(u) > k$, dans ce cas, $0 \leq k < \inf(\text{longueur}(u), \text{longueur}(w))$ tel que pour tout $i \leq k$ $w_i=v_i$ et $u_{k+1} \leq w_{k+1}$ et $w_{k+1} \neq u_{k+1}$, donc $u \text{ infLex } w$

Cas 2 il existe k , $0 \leq k < \inf(\text{longueur}(u), \text{longueur}(w))$ tel que pour tout $i \leq k$ $u_i=v_i$ et $v_{k+1} \leq w_{k+1}$ et $u_{k+1} \neq w_{k+1}$,

Cas 2.1 v est préfixe de w , donc $0 \leq k < \inf(\text{longueur}(u), \text{longueur}(v))$ tel que pour tout $i \leq k$ $u_i=v_i$ et $u_{k+1} \leq w_{k+1}$ et $w_{k+1} \neq u_{k+1}$, donc $u \text{ infLex } w$

Cas 2.2 il existe k' , $0 \leq k' < \inf(\text{longueur}(v), \text{longueur}(w))$ tel que pour tout $i \leq k'$ $w_i=v_i$ et $v_{k'+1} \leq w_{k'+1}$ et $w_{k'+1} \neq v_{k'+1}$,

Cas 2.2.1 $k' \geq k$, dans ce cas $0 \leq k < \inf(\text{longueur}(u), \text{longueur}(w))$ tel que pour tout $i \leq k$ $u_i=v_i$ et $u_{k+1} \leq w_{k+1}$ et $w_{k+1} \neq u_{k+1}$, donc $u \text{ infLex } w$

Cas 2.2.2 $k' < k$ Dans ce cas $0 \leq k' < \inf(\text{longueur}(u), \text{longueur}(w))$ tel que pour tout $i \leq k'$ $u_i=w_i$ et $u_{k'+1} \leq w_{k'+1}$ et $w_{k'+1} \neq u_{k'+1}$, donc $u \text{ infLex } w$

On vérifie « aisément » qu'il s'agit d'un ordre total .