

Langages rationnels

Corrigé partiel de la feuille de travaux dirigés n°7
1 avril 2005

1.
a) On considère que $L = L_1 \cap L_2$ avec $L_1 = (aa)^*$ et $L_2 = (aaa)^*(a + aa)$. On construit un automate A_1 pour reconnaître L_1 puis un automate A_2 pour reconnaître L_2 :

δ_{A_1}	a
$\leftrightarrow 0$	1
1	0

δ_{A_2}	a
$\rightarrow 1$	2
$\leftarrow 2$	3
$\leftarrow 3$	1

Et un automate produit pour reconnaître l'intersection :

$\delta_{A_1 \times A_2}$	a
$\rightarrow 01$	12
12	03
$\leftarrow 03$	11
11	02
$\leftarrow 02$	13
13	01

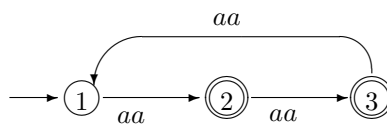
renuméroté

δ	a
$\rightarrow 0$	1
1	2
$\leftarrow 2$	3
3	4
$\leftarrow 4$	5
5	0

d'où le système :

$$\begin{cases} Z_0 = Z_5a + \varepsilon \\ Z_1 = Z_0a \\ Z_2 = Z_1a \\ Z_3 = Z_2a \\ Z_4 = Z_3a \\ Z_5 = Z_4a \end{cases}$$

D'où $Z_0 = Z_4aa + \varepsilon$, $Z_2 = Z_0aa$ et $Z_4 = Z_2aa$. Nous pouvons remarquer que cela correspond à l'automate : obtenu par substitution de aa à la place de a .



La suite des substitutions donne : $Z_0 = Z_0a^6 + \varepsilon$, $Z_2 = Z_0a^2$ et $Z_4 = Z_0a^4$. Ainsi nous obtenons la solution : $Z_0 = (a^6)^*$, $Z_2 = (a^6)^*a^2$ et $Z_4 = (a^6)^*a^4$ d'où $L = (aaaaaa)^*(aa + aaaa)$. Nous aurions pu déduire cette expression par la substitution dans de aa à a dans l'expression rationnelle du deuxième langage.

Une autre manière de procéder est :

$$\begin{aligned} L_1 &= (aa)^* = \{a^i : i \equiv 0 \pmod{2}\} = \{a^i : i \equiv 0, 2 \text{ ou } 4 \pmod{6}\} \\ L_2 &= (aaa)^*(a + aa) = \{a^i : i \equiv 1 \text{ ou } 2 \pmod{3}\} = \{a^i : i \equiv 1, 2, 4 \text{ ou } 5 \pmod{6}\} \\ L_1 \cap L_2 &= \{a^i : i \equiv 2 \text{ ou } 4 \pmod{6}\} = (aaaaaa)^*(aa + aaaa) \end{aligned}$$

b) On procède de manière analogue à l'exercice précédent : Soit A_1 un automate qui reconnaît $L_1 = (0 + 11)^*$ et A_2 qui reconnaît $L_2 = (01 + 10)^*$.

δ_{A_1}	0	1
$\leftrightarrow 0$	0	1
1	—	0

δ_{A_2}	0	1
$\leftrightarrow 1$	2	3
2	—	1
3	1	—

L'automate produit correspondant (et sa renumérotation) est :

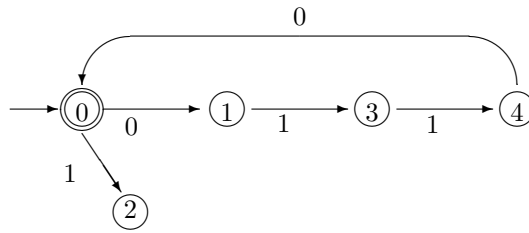
$\delta_{A_1 \times A_2}$	0	1	nouveau n°
$\leftrightarrow 01$	02	13	0
02	—	11	1
13	—	—	2
11	—	03	3
03	01	—	4

renuméroté :

δ	0	1
$\leftrightarrow 0$	1	2
1	—	3
2	—	—
3	—	4
4	0	—

système :

$$\begin{cases} Z_0 = Z_4 0 + \varepsilon \\ Z_1 = Z_0 0 \\ Z_2 = Z_0 1 \\ Z_3 = Z_1 1 \\ Z_4 = Z_3 1 \end{cases}$$



Nous obtenons donc $Z_0 = Z_0 0110 + \varepsilon \Rightarrow Z_0 = (0110)^*$. Donc $L = (0110)^*$.

c) On reconnaît ici les deux langages de l'exercice précédent. La différence est qu'au lieu de faire l'intersection, on effectue une différence ensembliste i.e. on s'intéresse aux mots de L_1 qui ne sont pas dans L_2 , autrement dit aux mots qui sont à la fois dans L_1 et dans le complémentaire de L_2 .

On construit donc un automate qui reconnaît L_2^C déduit de A_2 de l'exercice précédent dûment complété :

$\delta_{A_2^C}$	0	1
$\rightarrow 1$	2	3
$\leftarrow 2$	4	1
$\leftarrow 3$	1	4
$\leftarrow 4$	4	4

L'automate produit est alors :

$\delta_{A_1 \times A_2}$	0	1	
$\rightarrow 01$	02	13	0
$\leftarrow 02$	04	11	1
13	—	04	2
$\leftarrow 04$	04	14	3
11	—	03	4
14	—	04	5
$\leftarrow 03$	01	14	6

renuméroté

δ	0	1
$\rightarrow 0$	1	2
$\leftarrow 1$	3	4
2	—	3
$\leftarrow 3$	3	5
4	—	6
5	—	3
$\leftarrow 6$	0	5

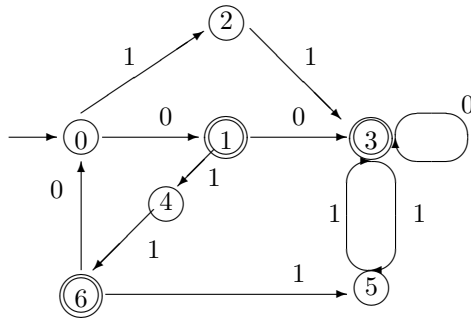
d'où le système :

$$\begin{cases} Z_0 = Z_6 0 + \varepsilon \\ Z_1 = Z_0 0 \\ Z_2 = Z_0 1 \\ Z_3 = Z_1 0 + Z_2 1 + Z_3 0 + Z_5 1 \\ Z_4 = Z_1 1 \\ Z_5 = Z_3 1 + Z_6 1 \\ Z_6 = Z_4 1 \end{cases}$$

On obtient :

$$\begin{cases} Z_1 = Z_6 00 + 0 \\ Z_3 = Z_1 0 + Z_3(0 + 11) + Z_6(011 + 11) + 11 \\ Z_6 = Z_1 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Z_1 = Z_1 1100 + 0 = 0(1100)^* = (0110)^* 0 \\ Z_3 = Z_3(0 + 11) + Z_1(0 + 11011 + 1111) + 11 \\ Z_6 = (0110)^* 011 \end{cases}$$

Ainsi nous avons $Z_3 = [(0110)^*(00 + 011011 + 01111) + 11](0 + 11)^*$



Ce qui donne l'expression rationnelle correspondant au langage :

$$L = [(0110)^*(00 + 011011 + 01111) + 11](0 + 11)^* + (0110)^*0 + (0110)^*011$$

Cette expression peut être simplifiée, car si on note $T = 0110$ nous avons :

$$T^*(00 + T11 + 01111) + 11 = T^*(00 + 01111) + (T^*T11 + 11) = T^*(00 + 01111) + T^*11 = T^*(00 + 11 + 01111)$$

et nous obtenons :

$$L = (0110)^*[(11 + 00 + 01111)(0 + 11)^* + 0 + 011]$$

En minimisant, on constate que les états 2 et 5 sont équivalents. On peut donc les fusionner.