Grammaires

Corrigé partiel de la feuille de travaux dirigés n^{o}10

7 mai 2004

1. B est non-productive, on peut donc la supprimer. On obtient $\langle N = \{S, A, C\}, T = \{a, b\}, S, P\rangle$:

$$P = \left\{ \begin{array}{l} S \to CA \\ A \to a \\ C \to b \end{array} \right\}$$ Le langage engendré par cette grammaire est $\{ba\}$.

2.

a) C est non-productive, on peut la supprimer. On obtient $G = \langle N = \{S, A, B\}, T = \{a, b\}, S, P\rangle$:

$$P = \left\{ \begin{array}{l} S \to aAa \\ A \to Sb \mid bBB \\ B \to abb \end{array} \right\}$$

b) productions sous forme normale de Chomsky :

$$P = \left\{ \begin{array}{ll} S \to DC & E \to b \\ C \to AD & F \to BB \\ D \to a & B \to DG \\ A \to SE \mid EF & G \to EE \end{array} \right\}$$

c) productions sous forme normale de Greibach :

$$P = \left\{ \begin{array}{l} S \to aAa \\ A \to aAab \mid bBB \\ B \to abb \end{array} \right\}$$

3. S_5, S_6, S_7, S_8 ne sont pas productives. Leur suppression donne $\langle N = \{S_1, S_2, S_3, S_4\}, T = \{a, b\}, S_1, P\rangle$:

$$P = \left\{ \begin{array}{l} S_1 \to S_1S_2 \mid S_2 \mid S_3 \\ S_2 \to bS_2 \mid \varepsilon \\ S_3 \to bS_3 \mid \varepsilon \\ S_4 \to bS_2 \mid S_3S_4 \end{array} \right\}$$

S_4 n'est pas accessible. Sa suppression donne $\langle N = \{S_1, S_2, S_3\}, T = \{a, b\}, S_1, P\rangle$:

$$P = \left\{ \begin{array}{l} S_1 \to S_1S_2 \mid S_2 \mid S_3 \\ S_2 \to bS_2 \mid \varepsilon \\ S_3 \to bS_3 \mid \varepsilon \end{array} \right\}$$

S_2 et S_3 sont identiques. On obtient donc $\langle N = \{S_1, S_2\}, T = \{a, b\}, S_1, P\rangle$:

$$P = \left\{ \begin{array}{l} S_1 \to S_1S_2 \mid S_2 \\ S_2 \to bS_2 \mid \varepsilon \end{array} \right\}$$

On peut lire directement le résultat. Le langage qu'on peut dériver à partir de S_2 est $b^\star$ et pour S_1 $(b^\star)^+ = b^\star$ (dans ce cas précis).

4. Les seules réponses possibles sont le **a)** et le **d)**. Il reste à montrer, que seule la réponse **a)** est correcte.
La question qu'on se pose est : *peut-on créer des symboles non-productifs lors de la suppression des non-accessibles ?*.

Supposons que le symbole X devienne non-productif suite à la suppression d'un symbole Y non-accessible. Dans ce cas, X est accessible (autrement le problème ne se pose pas), et donc Y doit aussi être accessible à travers X ! Ce qui règle le problème.

5. Il faut dans un premier temps supprimer les ε-productions de $\langle N = \{S, A, B\}, T = \{a, b\}, S, P\rangle$:

$$P = \left\{ \begin{array}{l} S \to Sa \mid Sb \mid Aa \\ A \to Bb \mid b \mid Aa \\ B \to Bb \mid Ba \mid b \mid a \end{array} \right\}$$

Ensuite on supprime la récursivité gauche en B, $\langle N = \{S, A, B\}, T = \{a, b\}, S, P\rangle$:

$$P = \left\{ \begin{array}{l} S \to Sa \mid Sb \mid Aa \\ A \to Bb \mid b \mid Aa \\ B \to bC \mid aC \mid b \mid a \\ C \to bC \mid aC \mid b \mid a \end{array} \right\}$$

B et C sont identiques $\langle N = \{S, A, B\}, T = \{a, b\}, S, P\rangle$:

$$P = \left\{ \begin{array}{l} S \to Sa \mid Sb \mid Aa \\ A \to Bb \mid b \mid Aa \\ B \to bB \mid aB \mid b \mid a \end{array} \right\}$$

Suppression de la récursivité gauche en A, $\langle N = \{S, A, B, C\}, T = \{a, b\}, S, P\rangle$:

$$P = \left\{ \begin{array}{l} S \to Sa \mid Sb \mid Aa \\ A \to Bb \mid b \mid BbC \mid bC \\ C \to a \mid aC \\ B \to bB \mid aB \mid b \mid a \end{array} \right\}$$

Suppression de la récursivité gauche en S , $\langle N = \{S, A, B, C, D\}, T = \{a, b\}, S, P\rangle$:

$$P = \left\{ \begin{array}{l} S \to Aa \mid AaD \\ D \to a \mid b \mid aD \mid bD \\ A \to Bb \mid b \mid BbC \mid bC \\ C \to a \mid aC \\ B \to bB \mid aB \mid b \mid a \end{array} \right\}$$

Il suffit de faire les substitutions (dans l'ordre B dans A puis A dans S) pour obtenir, $\langle N = \{S, A, B, C, D\}, T = \{a, b\}, S, P\rangle$:

$$P = \left\{ \begin{array}{l} S \to aBba \mid bBba \mid aba \mid bba \mid ba \mid aBbCa \mid bBbCa \mid abCa \mid bbCa \mid bCa \\ S \to aBbaD \mid bBbaD \mid abaD \mid bbaD \mid baD \mid aBbCaD \mid bBbCaD \mid abCaD \mid bbCaD \mid bCaD \\ D \to a \mid b \mid aD \mid bD \\ A \to aBb \mid bBb \mid ab \mid bb \mid b \mid aBbC \mid bBbC \mid abC \mid bbC \mid bC \\ C \to a \mid aC \\ B \to aB \mid bB \mid a \mid b \end{array} \right\}$$

A ce stade on remarque que A n'est plus accessible, donc on la supprime, $\langle N = \{S, B, C, D\}, T = \{a, b\}, S, P\rangle$:

$$P = \left\{ \begin{array}{l} S \to aBba \mid bBba \mid aba \mid bba \mid ba \mid aBbCa \mid bBbCa \mid abCa \mid bbCa \mid bCa \\ S \to aBbaD \mid bBbaD \mid abaD \mid bbaD \mid baD \mid aBbCaD \mid bBbCaD \mid abCaD \mid bbCaD \mid bCaD \\ D \to a \mid b \mid aD \mid bD \\ C \to a \mid aC \\ B \to aB \mid bB \mid a \mid b \end{array} \right\}$$

Remarque 1 : Selon la méthode vue en cours il fallait effectuer les substitutions au fur et mesure. En effet, dans le cas général, cela est nécessaire car la substitution elle même peut créer d'autres récursions gauches. Dans cet exercice nous avons pu supprimer les récursions gauches puis effectuer les substitutions car, hormis les récursions gauches (les boucles), le *graphe des dépendances* était sans circuit, donc les substitutions ne pouvaient créer de nouvelles boucles.

Remarque 2 : une autre manière de traiter ce problème - plus simple ici, mais pas généralisable consiste à **deviner** d'abord le langage. En effet, il est assez facile dans ce cas de réaliser que B permet de dériver les mots de $(a+b)^\star$, que A permet de dériver les mots de la forme $Bba^\star = (a+b)ba^\star$. Enfin, de S on peut dériver $Aa(a+b)^\star = (a+b)^\star ba^\star a(a+b)^\star$, ce qui se simplifie en $a+b)^\star ba(a+b)^\star$. Il est facile de donner la grammaire sous forme normale de Greibach qui correspond à l'automate non-déterministe qui reconnaît ce langage :

$N = \{S, X, Y\}$
$T = \{a, b\}$
S

$$P = \left\{ \begin{array}{l} S \to aS \mid bS \mid bX \\ X \to aY \mid a \\ Y \to a \mid b \mid aY \mid bY \end{array} \right\}$$