ESSI 1re année **Année 2003-2004**
Informatique théorique **Langages Formels et Automates**

Langages rationnels

Corrigé partiel de la feuille de travaux dirigés n^{o}7

8 avril 2004

1.

a) On considère que $L = L_1 \cap L_2$ avec $L_1 = (aa)^\star$ et $L_2 = (aaa)^\star(a + aa)$. On construit un automate A_1 pour reconnaître L_1 puis un automate A_2 pour reconnaître L_2 :

δ_{A_1}	a
$\leftrightarrow 0$	1
1	0

δ_{A_2}	a
$\rightarrow 1$	2
$\leftarrow 2$	3
$\leftarrow 3$	1

Et un automate produit pour reconnaître l'intersection :

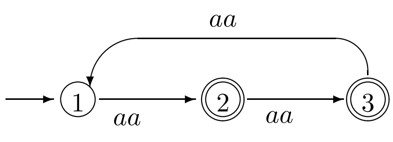
$\delta_{A_1 \times A_2}$	a
$\rightarrow 01$	12
12	03
$\leftarrow 03$	11
11	02
$\leftarrow 02$	13
13	01

renuméroté

δ	a
$\rightarrow 0$	1
1	2
$\leftarrow 2$	3
3	4
$\leftarrow 4$	5
5	0

d'où le système : $\left\{ \begin{array}{l} Z_0 = Z_5 a + \varepsilon \\ Z_1 = Z_0 a \\ Z_2 = Z_1 a \\ Z_3 = Z_2 a \\ Z_4 = Z_3 a \\ Z_5 = Z_4 a \end{array} \right.$

D'où $Z_0 = Z_4 aa + \varepsilon$, $Z_2 = Z_0 aa$ et $Z_4 = Z_2 aa$. Nous pouvons remarquer que cela correspond à l'automate : obtenu par substitution de aa à la place du a.



La suite des substitutions donne : $Z_0 = Z_0 a^6 + \varepsilon$, $Z_2 = Z_0 a^2$ et $Z_4 = Z_0 a^4$. Ainsi nous obtenons la solution : $Z_0 = (a^6)^\star$, $Z_2 = (a^6)^\star a^2$ et $Z_4 = (a^6)^\star a^4$ d'où $L = (aaaaaa)^\star(aa + aaaa)$.
Nous aurions pu déduire cette expression par la substitution dans de aa à a dans l'expression rationnelle du deuxième langage.
Une autre manière de procéder est :

$$L_1 = (aa)^\star = \{a^i : i \equiv 0 \mod 2\} = \{a^i : i \equiv 0, 2 \text{ ou } 4 \mod 6\}$$
$$L_2 = (aaa)^\star(a + aa) = \{a^i : i \equiv 1 \text{ ou } 2 \mod 3\} = \{a^i : i \equiv 1, 2, 4 \text{ ou } 5 \mod 6\}$$
$$L_1 \cap L_2 = \{a^i : i \equiv 2 \text{ ou } 4 \mod 6\} = (aaaaaa)^\star(aa + aaaa)$$

b) On procède de manière analogue à l'exercice précédent : Soit A_1 un automate qui reconnaît $L_1 = (0 + 11)^\star$ et A_2 qui reconnaît $L_2 = (01 + 10)^\star$.

δ_{A_1}	0	1
$\leftrightarrow 0$	0	1
1	$-$	0

δ_{A_2}	0	1
$\leftrightarrow 1$	2	3
2	$-$	1
3	1	$-$

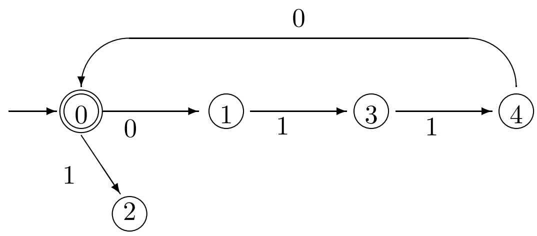
L'automate produit correspondant (et sa renumérotation) est :

$\delta_{A_1\times A_2}$	0	1	nouveau n^o
$\leftrightarrow 01$	02	13	0
02	$-$	11	1
13	$-$	$-$	2
11	$-$	03	3
03	01	$-$	4

renuméroté :

δ	0	1
$\leftrightarrow 0$	1	2
1	$-$	3
2	$-$	$-$
3	$-$	4
4	0	$-$

système : $\begin{cases} Z_0 = Z_4 0 + \varepsilon \\ Z_1 = Z_0 0 \\ Z_2 = Z_0 1 \\ Z_3 = Z_1 1 \\ Z_4 = Z_3 1 \end{cases}$



Nous obtenons donc $Z_0 = Z_0 0110 + \varepsilon \Rightarrow Z_0 = (0110)^\star$. Donc $L = (0110)^\star$.

c) On reconnaît ici les deux langages de l'exercice précédent. La différence est qu'au lieu de faire l'intersection, on effectue une différence ensembliste i.e. on s'intéresse aux mots de L_1 qui ne sont pas dans L_2, autrement dit aux mots qui sont à la fois dans L_1 et dans le complémentaire de L_2.

On construit donc un automate qui reconnaît L_2^C déduit de A_2 de l'exercice précédent dûment complété :

$\delta_{A_2^C}$	0	1
$\rightarrow 1$	2	3
$\leftarrow 2$	4	1
$\leftarrow 3$	1	4
$\leftarrow 4$	4	4

L'automate produit est alors :

$\delta_{A_1\times A_2}$	0	1	
$\rightarrow 01$	02	13	0
$\leftarrow 02$	04	11	1
13	$-$	04	2
$\leftarrow 04$	04	14	3
11	$-$	03	4
14	$-$	04	5
$\leftarrow 03$	01	14	6

renuméroté

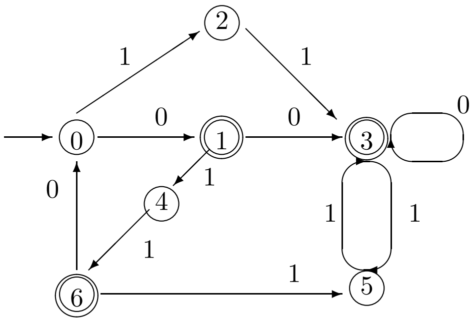
δ	0	1
$\rightarrow 0$	1	2
$\leftarrow 1$	3	4
2	$-$	3
$\leftarrow 3$	3	5
4	$-$	6
5	$-$	3
$\leftarrow 6$	0	5

d'où le système : $\begin{cases} Z_0 = Z_6 0 + \varepsilon \\ Z_1 = Z_0 0 \\ Z_2 = Z_0 1 \\ Z_3 = Z_1 0 + Z_2 1 + Z_3 0 + Z_5 1 \\ Z_4 = Z_1 1 \\ Z_5 = Z_3 1 + Z_6 1 \\ Z_6 = Z_4 1 \end{cases}$

On obtient :

$$\begin{cases} Z_1 = Z_6 00 + 0 \\ Z_3 = Z_1 0 + Z_3(0+11) + Z_6(011+11) + 11 \\ Z_6 = Z_1 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Z_1 = Z_1 1100 + 0 = 0(1100)^\star = (0110)^\star 0 \\ Z_3 = Z_3(0+11) + Z_1(0 + 11011 + 1111) + 11 \\ Z_6 = (0110)^\star 011 \end{cases}$$

Ainsi nous avons $Z_3 = [(0110)^\star(00 + 011011 + 01111) + 11](0+11)^\star$



Ce qui donne l'expression rationnelle correspondant au langage :

$$L = [(0110)^\star(00 + 011011 + 01111) + 11](0 + 11)^\star + (0110)^\star 0 + (0110)^\star 011$$

Cette expression peut être simplifiée, car si on note $T = 0110$ nous avons :

$$T^\star(00{+}T11{+}01111){+}11 = T^\star(00{+}01111){+}(T^\star T11{+}11) = T^\star(00{+}01111){+}T^\star 11 = T^\star(00{+}11{+}01111)$$

et nous obtenons :

$$L = (0110)^\star[(11 + 00 + 01111)(0 + 11)^\star + 0 + 011]$$

En minimisant, on constate que les états 2 et 5 sont équivalents. On peut donc les fusionner.