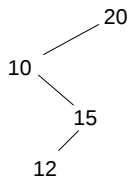
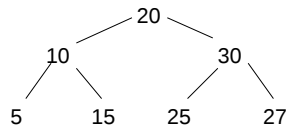


Question 1. Réponse(s) correcte(s) : a.

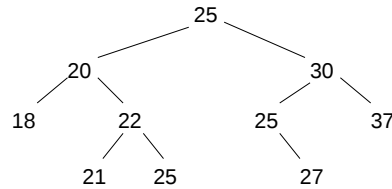
Regardez-bien, aucun des trois autres arbres n'est un ABR :



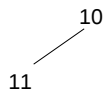
a.



b.



c.



d.

Question 2. Réponse(s) correcte(s) : b.

La hauteur maximale d'un ABR contenant n objets à clef de clef toutes distinctes est $n - 1$, quand l'arbre est filaire

Question 3. Réponse(s) correcte(s) : b.

Deux séquences d'ajout différentes des mêmes éléments peuvent donner le même ABR (par exemple, 10,5 et 15 pour la première et 10,15 et 5 pour la seconde). On peut facilement compter le nombre d'ABR distincts issus de l'ajout de n éléments distincts pour $n = 1, 2, 3, 4$, les éléments en question étant de clefs 1,2,3 et 4 :

n	1	2	3	4
nombre d'ABR distincts	1	2	$2 + 1 + 2 = 5$	$5 + 2 + 2 + 5 = 14$

Par exemple, si on ajoute les valeurs 1,2,3,4 de toutes les manières différentes, on obtient les 5 ABR de racine 1 (puisque le sous-arbre gauche est vide et qu'il y a 5 sous-arbres droits possibles), plus les 2 ABR de racine 2 (puisque l'unique sous-arbre gauche est la feuille 1 et qu'il y a 2 sous-arbres droits possibles), plus les 2 ABR de racine 3 (puisque l'unique sous-arbre droit est la feuille 4 et qu'il y a 2 sous-arbres gauches possibles), plus enfin les 5 ABR de racine 4 (puisque le sous-arbre droit est vide et qu'il y a 5 sous-arbres gauches possibles).

Question 4. Réponse(s) correcte(s) : c.

On peut montrer par récurrence sur n que le nombre d'ABR filaires distincts qu'on peut obtenir en ajoutant successivement n objets de clef distinctes dans un ABR initialement vide est 2^{n-1} . En effet, soit F_n le nombre cherché : comme l'ABR filaire ne peut avoir comme racine que le minimum ou le maximum des n éléments, on a la relation $F_n = 2F_{n-1}$ avec $F_1 = 1$, d'où $F_n = 2^{n-1}$.

Question 5. Réponse(s) correcte(s) : a, b.

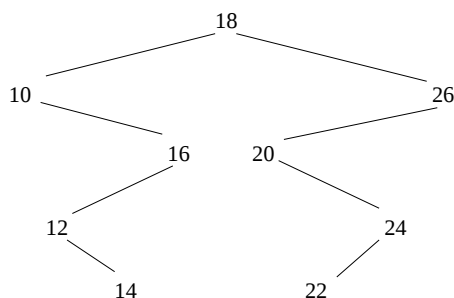
L'unique bonne réponse était ici a. mais on a considéré également b. comme une bonne réponse. En effet, pour un ABR **particulier**, la seule chose qu'on puisse affirmer est que la complexité de l'ajout d'un élément est bornée par la hauteur de l'arbre, qui elle est comprise entre $\lg n$ et n . Le pire des cas, si on considère **tous** les ABR possibles est bien n .

Question 6. Réponse(s) correcte(s) : a, b.

Même chose que précédemment.

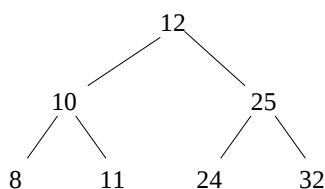
Question 7.

On obtient l'ABR suivant :

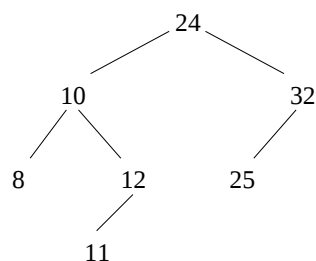


Question 8.

Suivant la méthode de suppression employée, on obtient l'ABR *a.* dans le cas où on remplace l'élément à supprimer par le maximum du sous-arbre gauche, ou bien l'ABR *b.* dans le cas où on remplace l'élément à supprimer par le minimum du sous-arbre droit :



a.



b.

Question 9. *Réponse(s) correcte(s) : d.*

Si on veut énumérer les éléments d'un ABR dans l'**ordre** (croissant ou décroissant) il faut effectuer un parcours **infixe** de l'arbre. Un parcours infixe **gauche** (gauche-racine-droite) énumère les éléments dans l'ordre des clefs **croissantes**, alors qu'un parcours infixe **droit** (droite-racine-gauche) énumère les éléments dans l'ordre des clefs **décroissantes**.

Question 10. *Réponse(s) correcte(s) : c.*

La hauteur moyenne est la somme des profondeurs des feuilles de l'arbre divisée par le nombre de feuilles, soit, pour l'arbre en question, $(2 + 4 + 4 + 3 + 4 + 4 + 2)/7 = 23/7$

Question 11. *Réponse(s) correcte(s) : aucune.*

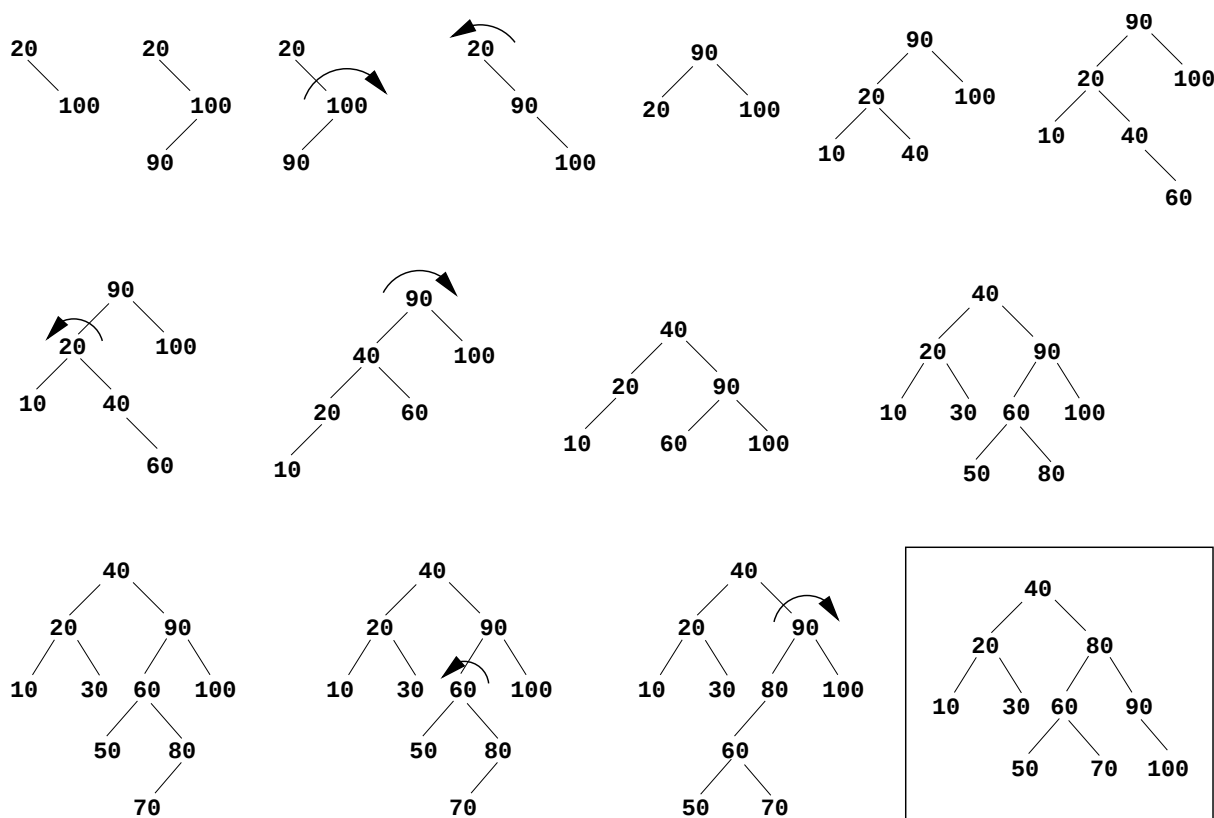
Aucun des arbres présentés n'était un AVL :

- *a.* est un ABR mais n'est pas H-équilibré (à cause du sous-arbre de racine 10)
- *b.*, *c.* et *d.* ne sont pas des ABR valides !

Cette question ne respectant pas la règle énoncée au début du sujet, aucun point n'a été retiré à ceux qui ont trouvé malgré tout des AVL.

Question 12.

On détaille ici les différentes étapes lors de l'ajout des éléments, mais seul le résultat était demandé :

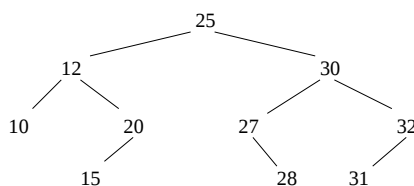


Question 13.

Il suffit de supprimer les éléments de l'arbre en commençant par les feuilles et les retirant niveau par niveau, par exemple dans l'ordre : 50, 70, 100, 10, 30, 60, 90, 20, 80 et 40.

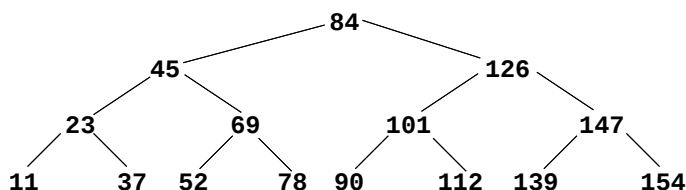
Question 14.

Ici, quelquesoit la méthode de suppression employée, on obtient toujours le même AVL :



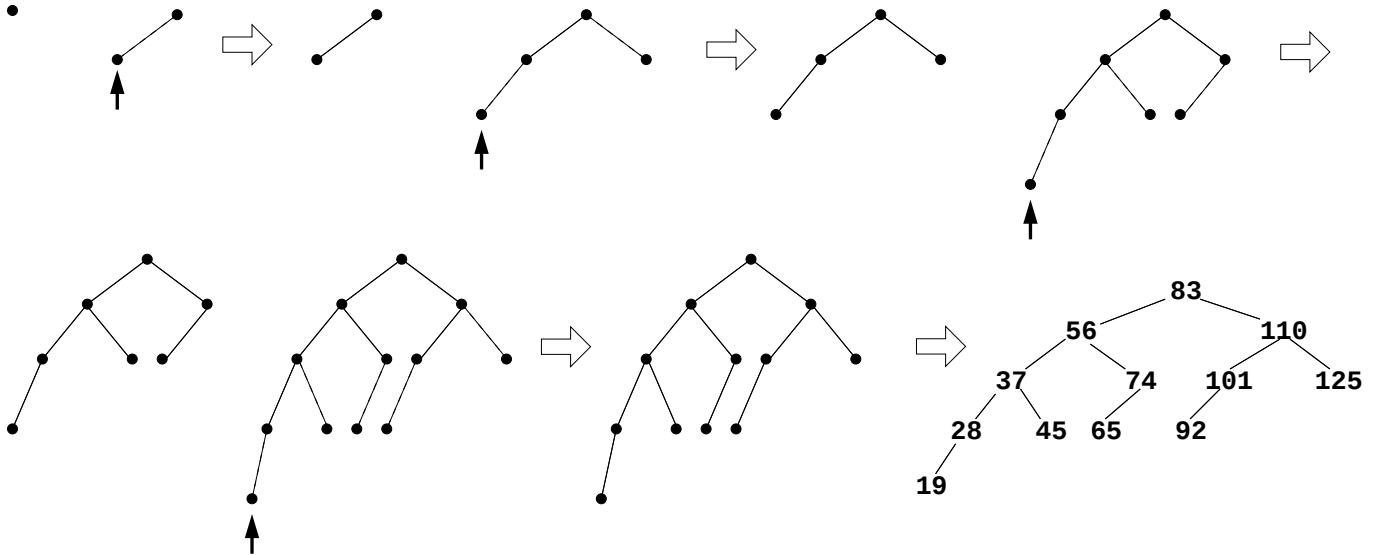
Question 15.

Un AVL d'une taille donnée n le *moins haut* est celui qui se rapproche le plus de l'arbre *complet* de la même taille, la taille n d'un arbre complet de hauteur h vérifiant $n = 2^{h+1} - 1$. On demandait ici l'AVL de taille 15 le moins haut. En remarquant que $15 = 2^4 - 1$, on en déduit que cet AVL est l'**unique** AVL complet de taille 15 et de hauteur 3 contenant les éléments proposés :



Question 16.

On peut fabriquer un grand nombre d'AVL différents de hauteur maximale avec les 12 éléments proposés. Pour en trouver au moins un, on peut le construire itérativement à partir de l'AVL de taille 1 (une feuille), et en ajoutant à chaque itération à l'AVL en cours de construction, le plus petit nombre d'éléments nécessaires pour faire augmenter sa hauteur de 1. On trouve ainsi l'AVL de hauteur 4 suivant :



Dans la figure précédente, les nouveaux éléments de l'AVL sont ceux qui apparaissent au bout des branches en pointillés. L'élément fléché est l'élément qui augmente la hauteur de l'AVL de 1, les autres éléments sont juste ceux nécessaires pour que l'AVL reste un AVL.

Question 17. Réponse(s) correcte(s) : *b, d.*

Seule la structure d'un arbre permet de décider s'il est parfait ou non, les valeurs aux nœud n'étant pas pertinentes. Ici, seuls les arbres *b.* et *d.* répondent à la définition d'un arbre parfait.

Question 18. Réponse(s) correcte(s) : *b.*

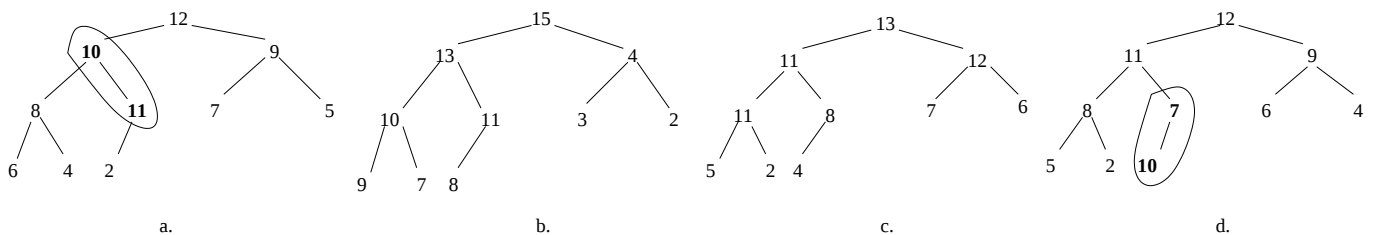
Il suffit de se souvenir de la double inégalité qui relie la hauteur et le nombre d'éléments d'un arbre parfait, à savoir $2^h \leq n < 2^{h+1}$, pour remarquer que $2^9 = 512 \leq 1000 < 2^{10} = 1024$ et donc conclure que $h = 9$.

Question 19. Réponse(s) correcte(s) : *b.*

La même inégalité, à savoir $2^h \leq n < 2^{h+1}$, donne immédiatement $2^{10} = 1024 \leq n < 2^{11} = 2048$ et donc $n = 1024$.

Question 20. Réponse(s) correcte(s) : *b, c.*

Un tas est implémenté par un suffixe de tableau. Seule les valeurs du suffixe en question appartiennent au tas. En considérant les suffixes de longueur 10 des tableaux proposés, on obtenait les arbres parfaits suivants :



Parmi ces arbres parfaits, seuls *b.* et *c.* respectent l'ordre partiel et sont des tas.